

Диференціація навчання майбутніх вчителів математики комплексному аналізу засобами CoCalc

Майя Володимирівна Попель

Відділ хмаро орієнтованих систем інформатизації освіти, Інститут
інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України,
вул. М. Берлінського, 9, м. Київ, 04060, Україна
mari_lin@mail.ru

Дмитро Євгенович Бобилєв

Кафедра математики та методики її навчання, Криворізький державний
педагогічний університет, пр. Гагаріна, 54, м. Кривий Ріг, Україна
bob_d@i.ua

Анотація. *Цілі дослідження:* визначити способи диференціації навчання майбутніх вчителів математики комплексному аналізу засобами CoCalc. *Завдання дослідження:* проаналізувати проблему диференціації навчання в педагогічних ЗВО, зокрема в процесі викладання фахових дисциплін; визначити місце комплексного аналізу серед математичних дисциплін в педагогічному ЗВО; дослідити вплив CoCalc на диференціацію навчання майбутніх вчителів математики комплексному аналізу. *Об'єкт дослідження:* навчання комплексному аналізу майбутніх учителів математики у педагогічних ЗВО. *Предмет дослідження:* диференціація навчання майбутніх вчителів математики комплексному аналізу. Використані *методи дослідження:* аналіз наукових публікацій, спостереження, бесіди з викладачами. *Результати дослідження.* На основі аналізу наукових праць та бесід з викладачами встановлено, що проблема диференціації навчання є досить актуальною під час викладання математичних дисциплін. Визначено місце комплексного аналізу серед математичних дисциплін. Показано, що диференціація навчання передбачає включення диференційованих завдань в процес навчання. Розглянуто специфіку використання CoCalc під час вивчення теми «Комплексні функції комплексної змінної» з комплексного аналізу. *Основні висновки і рекомендації:* 1) доцільне використання диференційованих завдань (що розподілені за певним критерієм), як основної передумови диференціації навчання; 2) поступове ускладнення завдань, з поступовим узагальненням вже вивченого матеріалу та осягненням дослідницького рівня.

Ключові слова: диференціація навчання; комплексний аналіз; комплексна функція комплексної змінної; майбутні вчителі математики; хмарний сервіс; CoCalc.

M. V. Popel^{*}, D. Ye. Bobylyev[#]. Differentiation of student learning to complex analysis using CoCalc

Abstract. *Research goals:* to determine the ways of differentiation of future mathematics teacher learning to complex analysis using CoCalc. *Research objectives:* to analyze the problem of differentiating learning in pedagogical universities, particularly in process of teaching the professional disciplines; to determine the place of complex analysis in mathematical disciplines of pedagogical universities; to investigate the impact of CoCalc on differentiation of future mathematics teachers learning to complex analysis. *Object of research:* learning to complex analysis of future mathematics teachers at pedagogical universities. *Subject of research:* differentiation of student learning to complex analysis. *Research methods used:* analysis of scientific publications, observations, interviews with teachers. *Results of the research.* Based on the analysis of scientific works and interviews with teachers established that the problem of differentiating learning is very relevant during teaching of mathematical disciplines. Defined the place of complex analysis in mathematical disciplines. It's shown that differentiated instruction is intended to include differentiated tasks in the learning. The specificity using CoCalc on "Complex function of complex variable" are described. *The main conclusions and recommendations:* 1) expedient use of differentiated tasks (which are distributed by different criteria) as a basic premise differentiation of education; 2) gradual complication of tasks with the gradual generalization of already learned material research and comprehension level.

Keywords: differentiated instruction; complex analysis; complex function of a complex variable; future teachers of mathematics; cloud services; CoCalc.

Affiliation: Department of Cloud-Oriented Systems of Education Informatization, Institute of Information Technologies and Learning Tools of NAES of Ukraine, M. Berlyns'koho Str., 9, Kyiv, 04060, Ukraine^{*};

Department of mathematics and its teaching methods, Kryvyi Rih State Pedagogical University, Gagarina Ave., 54, Krivyi Rig, 50086, Ukraine[#].

E-mail: mari_lin@mail.ru^{*}, bob_d@i.ua[#].

Методика викладання математичних дисциплін у педагогічному ЗВО повинна служити для студентів – майбутніх вчителів джерелом методичних ідей, слугувати формуванню у них сучасних методичних поглядів та умінь і в певному сенсі бути зразком, завдяки якому вони можуть в подальшому будувати свою професійну діяльність.

Проблеми математичної підготовки майбутніх вчителів математики завжди цікавили математиків і науковців в області математичної освіти. Але проблеми диференціації предметно-математичної підготовки на даний час приділяється недостатньо уваги. І. С. Якиманська з цього

приводу зазначала: «Поки, на жаль, навчальні програми задають лише обсяг знань, умінь і навичок, є своєрідною інформаційною системою, обов'язковою для засвоєння незалежно від індивідуальності кожного студента. Багато з них мало орієнтовані на формування особистісних якостей, що складають основу професійної майстерності ... Чим раніше буде створене освітнє середовище, яке дозволяє диференціювати студентів за їх здібностями, життєвими прагненнями, особистісними цінностями, тим швидше і легше буде відбуватись процес їх професійного становлення та самовизначення» [1].

Проте, на думку Є. Є. Гончарової [2], актуальність диференціації навчання під час вивчення фахових дисциплін майбутніми учителями, зокрема математики, визначається специфікою подальшої професійної діяльності. Аналізуючи переваги диференціації навчання, майбутній вчитель математики має змогу застосовувати її у своїй подальшій практичній діяльності.

У математичній підготовці студентів педагогічних ЗВО, як і раніше, залишаються актуальними такі проблеми, як низький рівень володіння сучасними математичними знаннями, слабе знання зв'язків між курсами математики у ЗВО і шкільним курсом математики, прихильність студентів і викладачів педагогічних ЗВО до догматичного і пояснювального типам навчання.

Логічним продовженням ідеї використання диференційованих завдань з метою врахування індивідуальних особливостей студентів є ідея виконання самостійних робіт в середовищі CoCalc у процесі навчання комплексного аналізу (теорії функцій комплексної змінної).

Знайомство з числами, елементарними функціями починається в школі. Саме там закладаються інтуїтивні знання про властивості числа, елементарні функції (лінійні, дробово-раціональні, тригонометричні, логарифмічні та ін.). Крім того, введення початків аналізу вимагає від учителя математики всебічного знання про поняття границі, неперервності, похідної, інтеграла тощо. Але для того, щоб грамотно закладати ці знання, вчитель повинен засвоїти їх наукові основи. Тому велике значення при підготовці вчителів має вивчення комплексного аналізу. Комплексний аналіз служить не тільки фундаментом математичної освіти, але є також тим розділом математики, з якого можуть бути пояснені основи елементарної математики, що становлять базовий шкільний курс математики. Комплексний аналіз має на меті побудову логічної класифікації функцій, а також поглибленого вивчення поняття числа і різних класів функцій. При вивченні комплексного аналізу в педагогічному ЗВО необхідно зробити акцент на виявленні і використанні студентами закономірностей розвитку наукових теорій, а

також правил наукового пошуку. При цьому студенти залучаються до процесу створення теорії, вчать прогнозувати її розвиток, організувати дослідницьку діяльність. Вивчення комплексного аналізу дозволяє удосконалювати математичну підготовку і розвивати методичні вміння і навички майбутнього вчителя математики. Саме при вивченні комплексного аналізу студент повинен знаходити відповіді на надзвичайно важливі питання шкільного курсу математики.

Розглянемо особливості розв'язування завдань засобами CoCalc на прикладі певної теми комплексного аналізу: «Комплексні функції комплексної змінної».

У процесі диференціації навчального матеріалу за певними рівнями постає можливість сконцентруватись на здібностях та цілепокладанні окремих студентів, індивідуалізувати зміст навчання, використати творчий підхід до розв'язання окремих завдань.

Диференціація навчання можлива в першу чергу за рахунок включення в освітній процес диференційованих завдань. Диференціювати завдання за операційним змістом, означає розглянути завдання з різною кількістю виконання операцій по відношенню до фіксованого обсягу змісту завдання. Якщо ж розуміти диференціацію за самостійністю, тоді такі завдання виступають однотипними за операційним змістом та є різноплановими з урахуванням наданої викладачем допомоги окремому студенту [3].

Вивчення теми «Комплексні функції комплексної змінної» доцільно розпочати з актуалізації залишкових знань, зокрема з поняття «комплексне число» та дії з ним. Повний перелік базових команд для роботи з комплексними числами в підтримку дисципліни «Комплексний аналіз» у CoCalc можна отримати, ввівши команду: `abssage.rings.complex_number.ComplexNumber.<Tab>`. Повторення та закріплення даних команд можна організувати в процесі виконання завдань на обчислення суми комплексних чисел, різниці, добутку, частки, піднесення до степеня; знаходження модуля та головного значення аргументу комплексного числа; виконання дій над комплексними числами в тригонометричній формі; розв'язання рівнянь тощо.

Найпростіші завдання полягають в знаходженні значення функції від однієї комплексної змінної. У процесі їх виконання студенти відпрацьовують навички оголошення функції від комплексної змінної, представлення комплексного числа та побудови графіка функції комплексної змінної.

За допомогою функції `complex_plot` можна відобразити графік функції комплексної змінної (рис. 1). Кольором на ньому буде закодовано напрямок вектора комплексного числа, а інтенсивністю кольору – його

модуль.

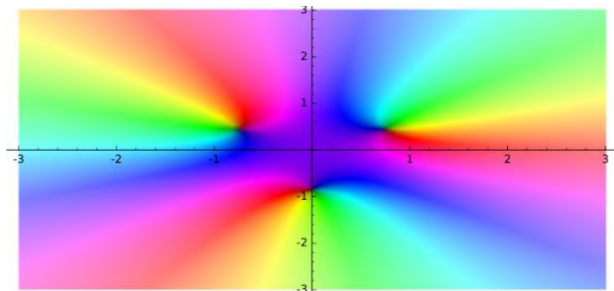


Рис. 1. Графік комплексної функції $f(z) = 3z^3 - 2i$

Інтерпретувати такі графіки не завжди легко, але в якості прикладу яскравих ілюстрацій вони підходять якомога краще.

На прикладі однієї точки (комплексного числа) можна проілюструвати різні види перетворень комплексної функції: гомотетію, перетворення подібності, обернену пропорційність, конформне відображення. В якості узагальнення досліджень окремих перетворень можна скласти анімацію, що ілюструватиме покрокове перетворення певної фіксованої точки:

```
z=var('z')
f1(z)=z/2
f2(z)=f1(z)*i
f3(z)=f2(z)*(1+i)
f4(z)=f3(z)^2
show(animate([
    arrow((0,0), ((4+2*i).real(), (4+2*i).imag()),),
    arrow((0,0), (f1(4+2*i).real(), f1(4+2*i).imag()),),
    arrow((0,0), (f2(4+2*i).real(), f2(4+2*i).imag()),),
    arrow((0,0), (f3(4+2*i).real(), f3(4+2*i).imag()),),
    arrow((0,0), (f4(4+2*i).real(), f4(4+2*i).imag()),)],
    xmin=-4, xmax=8, ymin=-8, ymax=4), delay=60)
```

Після проведення досліджень з окремою, фіксованою точкою можна здійснити моделювання області визначення комплексної функції від комплексної змінної, на прикладі лінійної функції. Вона має вигляд: $F(z) = w = az + b$, де a, b – задані комплексні сталі. Окремо слід розглянути область визначення та область значення комплексної функції. Побудуємо область визначення функції – квадрат з центром у початку координат, а потім змінюючи комплексні сталі a, b , побудуємо область значень лінійної функції. Розглянемо поведінку функції за різних значеннях a, b . Наприклад, таке перетворення, як обертання можна одержати, якщо прийняти, що $a = 1 + ia_2, b = 0 + i0$. В даному випадку область визначення функції та область значень мають однакову форму, але область значень

повернута на кут, який можна визначити з тригонометричної форми запису комплексних чисел (рис. 2, *a*). В залежності від значень комплексних сталих a, b можна одержати суперпозицію двох перетворень області визначення комплексної функції від комплексної змінної (рис. 2, *б*).

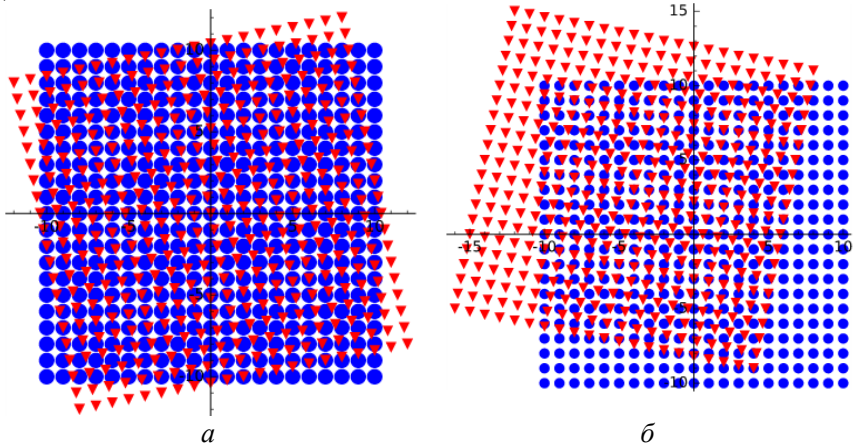


Рис. 2. Моделювання області значень лінійної функції комплексної змінної

Дослідження зміни області визначення та області значення в залежності від значень констант доречно організувати з використанням стандартних елементів управління типу «повзунок» (рис. 3). Зі зміною комплексних сталих лінійної функції від комплексної змінної можна одержати наступні перетворення: тотожну функцію, паралельне перенесення, обертання, масштабування (збільшення або зменшення розмірів області визначення) або суперпозицію декількох перетворень.

При цьому задля порівняння та унаочнення відмінностей між областю визначення та областю значень комплексної функції краще представити кожену область у вигляді окремих точок різної форми та кольору.

Аналогічним чином можна провести дослідження квадратичної комплексної функції від комплексної змінної. Якщо представити область визначення квадратичної функції як квадрат з центром у початку координат, то область значень матиме вигляд, представлений на рис. 4, *a*. При цьому, застосовуючи перетворення, студенти можуть спостерігати, що область значень змінюється: перетворення обертання (рис. 4, *б*) та перетворення масштабування (рис. 4, *в*).

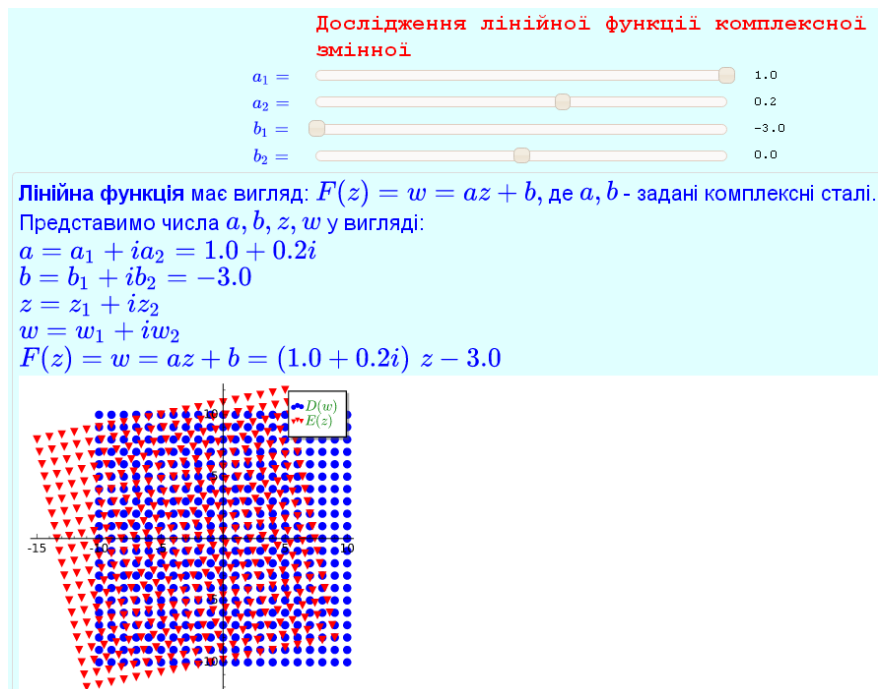


Рис. 3. Демонстрація перетворення області визначення комплексної функції в залежності від вихідних параметрів

В якості дослідження можна запропонувати студентам функцію, яка має вигляд: $F(z) = w = az^2 + b$, де a, b – задані комплексні сталі.

Корисним буде детальне дослідження усіх елементарних функцій комплексної змінної та порівняння їх області визначення та області значення. Після побудови областей значень елементарних функцій, студенти з легкістю зможуть знаходити області, що обмежені певними лініями, описувати області, які обмежені певним співвідношенням, визначати які лінії задані певним рівнянням, знаходити образи заданих точок при певних відображеннях та ін.

Запропонована методика диференціації навчання і дидактичні можливості, що впливають з неї при навчанні комплексного аналізу, зміна умов навчання в світлі нових вимог до підготовки фахівців – все це говорить про зміни традиційного підходу до вивчення даного курсу і перш за все – в напрямку підвищення якості осмислення студентами матеріалу курсу і розвитку поняття «функція» в цілому. Суть нового підходу полягає в активному включенні суб'єктного досвіду студентів в освітній процес вивчення комплексного аналізу як дисципліни, яка

систематизує і узагальнює курс аналізу, за допомогою засобів CoCalc. Результати застосування запропонованої методики диференціації навчання:

- осмислення студентами математичної бази комплексного аналізу на різних рівнях навченості;
- цілісний і усвідомлений характер знань про елементарні функції, особистісно значуще уявлення про теорію функцій;
- поповнення суб'єктного досвіду студента, розширення його можливостей у власній математичній діяльності.

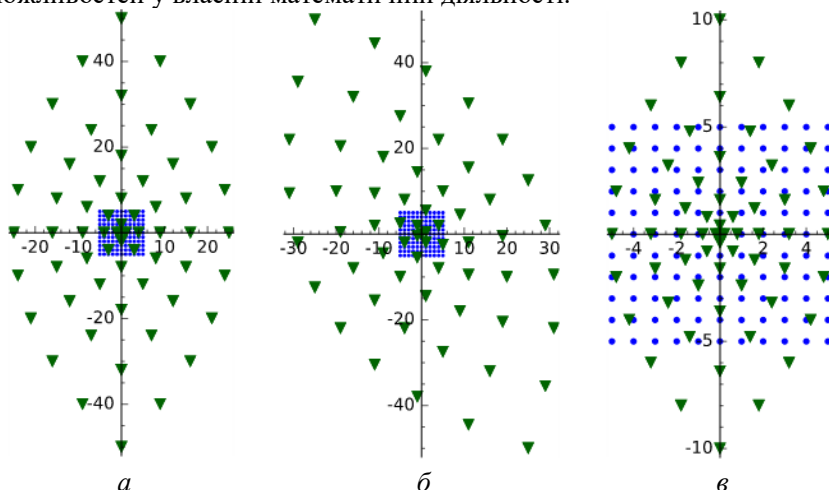


Рис. 4. Область визначення та область значення квадратичної функції комплексної змінної

Висновки. Залучення засобів CoCalc до навчання дисципліни «Комплексний аналіз» вимагає врахування певних особливостей викладу матеріалу, іншого підходу до розв'язання класичних завдань. Диференціювати завдання допоможе включення до освітнього процесу більшої кількості засобів, які представлені в хмарному середовищі: Chatroom, LaTeX Document, Manage a Course, Task List, а не лише найбільш поширеного ресурсу – робочого аркушу.

Список використаних джерел

1. Якиманская И. С. Формирование интеллектуальных умений и навыков в процессе производственного обучения / И. С. Якиманская. – М. : Высш. школа, 1979. – 88 с. – (Библиотечка мастера производственного обучения).
2. Гончарова Є. Є. Диференціація навчання фахових дисциплін

майбутніх учителів іноземної мови у вищих педагогічних закладах : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.09 – теорія навчання / Гончарова Євгенія Євгенівна ; Тернопільський нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка. – Тернопіль, 2015. – 20 с.

3. Дразниця С. А. Диференціація навчання : актуальні проблеми та пріоритетні шляхи реалізації в інтегрованому освітньому просторі ВНЗ / С. А. Дразниця, О. М. Дразниця, О. А. Дудар // Збірник наукових праць Хмельницького інституту соціальних технологій Університету «Україна». – 2010. – № 2. – С. 178-183.

References (translated and transliterated)

1. Iakimanskaia I. S. Formirovanie intellektualnykh umenii i navykov v protsesse proizvodstvennogo obucheniiia [Formation of intellectual skills and acquired habit in the process of production training] / I. S. Iakimanskaia. – М. : Vyssh. shkola, 1979. – 88 s. – (Bibliotechka mastera proizvodstvennogo obucheniiia). (In Russian)

2. Honcharova E. E. Dyferentsiatsiya navchannya fakhovykh dystsyplin maybutnikh uchyteliv inozemnoyi movy u vyshchyykh pedahohichnykh zakladakh [Differentiation of professional disciplines teaching future teachers of foreign languages in higher educational institutions] : avtoref. dys. ... kand. ped. nauk : 13.00.09 – teoriya navchannya / Honcharova Yevheniya Yevhenivna ; Ternopilskyu nats. ped. un-t im. V. Hnatyuka. – Ternopil, 2015. – 20 pp. (In Ukrainian)

3. Drazhnytsya S. A. Dyferentsiatsiya navchannya : aktualni problemy ta priorytetni shlyakhy realizatsiyi v intehrovanomu osvithnomu prostori VNZ [Differentiated Instruction: actual problems and priority ways of implementation in an integrated educational space university] / S. A. Drazhnytsya, O. M. Drazhnytsya, O. A. Dudar // Zbirnyk naukovykh prats Khmelnytskoho instytutu sotsialnykh tekhnolohiy Universytetu «Ukrayina». – 2010. – № 2. – P. 178-183. (In Ukrainian)