

A methodological framework for using cloud-based mobile mathematical environments in higher education

Kateryna I. Slovak^{1,2}[0000–0003–4012–8386]

¹ Institute for Digitalisation of Education of the NAES of Ukraine,
9 M. Berlynskoho Str., Kyiv, 04060, Ukraine

² Academy of Cognitive and Natural Sciences,
54 Gagarin Ave., Kryvyi Rih, 50086, Ukraine
Slovak@knvk129.dp.ua
<http://irbis-nbuv.gov.ua/ASUA/0045329>

Abstract. This research aims to develop a methodology for utilizing cloud-based technologies in the teaching of higher mathematics. The study tasks involve identifying the features of mobile mathematical environments as tools for cloud-based technologies, developing a mobile mathematical environment specifically designed to support mathematics learning for students in economic disciplines, and formulating a methodology for employing the mobile mathematical environment. The research focuses on the process of teaching higher mathematics to students in economic disciplines. The subject of investigation encompasses the use of cloud-based learning technologies in the teaching of higher mathematics. The research methods employed include studying, summarizing, and systematizing scientific, methodological, and psycho-pedagogical literature; analyzing current educational standards and curricula; conducting targeted pedagogical observations, testing, and surveys; and analyzing the experience of using cloud-based learning technologies in the teaching of higher mathematics. The findings analyze the main features of mobile mathematical environments as tools for cloud-based technologies. The “Higher Mathematics” mobile mathematical environment, designed to support the learning of higher mathematics for students in economic disciplines, is examined. Elements of the methodology for utilizing the “Higher Mathematics” mobile mathematical environment in the teaching of higher mathematics are identified. The study identifies instructional formats through which the implementation of the “Higher Mathematics” mobile mathematical environment occurs in the teaching of higher mathematics. The main conclusions and recommendations emphasize that the use of the “Higher Mathematics” mobile mathematical environment in the teaching of higher mathematics enables students to master the necessary educational material and contributes to the development of cognitive activity, the formation of independent work skills, and the consolidation and systematization of knowledge.

Keywords: mobile mathematical environment · cloud-based technologies · higher mathematics · teaching methodology · mathematics educa-

tion · educational technology · digital learning · mathematics instruction
 · cloud-based learning platforms

1 Мобільні математичні середовища як засіб хмарних технологій

Використання хмарних обчислень в освіті може революціонізувати освіту в Україні та зробити її більш доступною та ефективною [1] через надання можливостей:

- зменшити витрати на апаратне та програмне забезпечення;
- створювати віртуальні середовища для студентів та викладачів (студент може зайти на домашню сторінку, отримати доступ до матеріалів навчальних курсів, коментарів та відповідей викладача);
- створювати віртуальні навчальні класи та лабораторії, що реалізують можливості з проведення конференцій, лекцій, семінарів, тренінгів тощо;
- мобільного доступу до інформаційних ресурсів і сервісів Інтернету через використання смартфонів, нетбуків, тощо;
- розширити комунікативне поле «студент–викладач» за межі навчального закладу;
- забезпечити рівні можливості тих, хто навчається, до якісних навчальних програм незалежно від місця проживання та навчання;
- організувати електронний документообіг навчального закладу;
- збільшити обчислювальні потужності і об'єм даних, що зберігаються;
- резервного копіювання даних.

Прикладами хмарних сервісів, що спеціально розроблено для освітніх установ є Google for Education, Office 365 Education. Крім того, нові пропозиції компанії Microsoft надають можливість навчальним закладам використовувати з освітньою метою Azure Dev Tools for Teaching. Іншим прикладом хмарних послуг у сфері освіти є використання систем управління навчанням таких, як Blackboard [8] та Moodle [3]. Ці сервіси можуть замінити або доповнити функції університетських систем, таких, як: електронна пошта, складання календарного плану, месенджери, створення та зберігання персональних документів, надання до них загального доступу.

Разом з тим, перелічені засоби не забезпечують процес навчання математичних дисциплін у повній мірі, а тому актуальною є проблема розробки та впровадження програмних засобів математичного призначення розроблених на основі хмарних технологій. До таких засобів можна віднести мережні ІКТ математичного призначення, зокрема Web-систему комп'ютерної математики (Web-CKM) SageMath (<https://www.sagemath.org/>), систему Wolfram|Alpha (<https://www.wolframalpha.com/>), систему динамічної геометрії GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>) тощо.

Кожен з перелічених засобів відрізняється за функціональними можливостями, має свої переваги щодо вивчення тієї чи іншої теми, а тому доцільним є їх використання у єдиному середовищі. Таким чином, перспективним

напрямом використання хмарних технологій у навчанні математичних дисциплін є побудова на їх основі предметно-орієнтованих середовищ.

Одним з прикладів такого освітньо-наукового середовища є мобільні математичні середовища (ММС).

Мобільне математичне середовище – відкрите модульне мережне мобільне інформаційно-обчислювальне програмне забезпечення, що надає користувачу (викладачу, студенту) можливість мобільного доступу до інформаційних ресурсів математичного і навчального призначення, створюючи умови для ефективної організації процесу навчання та інтеграції аудиторної і позааудиторної роботи [12].

До основних характеристик ММС відносяться [5, 9, 12]:

- *мобільність доступу*: виконуватись на широкому спектрі комп'ютерних пристроїв, що надає можливість залучити в якості засобів навчання нетбуки, планшетні комп'ютери та смартфони;
- *мобільність програмного забезпечення*: можливість перенесення середовища на різні програмно-апаратні платформи без суттєвої модифікації;
- *мережність*: зберігання математичних об'єктів на мережних серверах, що надає можливість уніфікувати доступ до них як в навчальній аудиторії, так і за її межами;
- *відкритість*: можливість зміни інформаційної та обчислювальної складової середовища;
- *модульність*: можливість додавання, вилучення та заміни компонентів середовища;
- *об'єктна орієнтованість*: можливість прототипування, створення, модифікації, наслідування, інкапсуляції математичних об'єктів;
- *можливість природного застосування ефективних педагогічних технологій організації спільної роботи* над навчальними проектами у навчальних спільнотах.

Особливістю ММС є динамічна природа навчальних матеріалів – будь-який опублікований у мережі об'єкт може автоматично змінюватися у відповідності до: зміни вмісту пов'язаного з ним робочого аркуша; зміни програмного забезпечення, що входить до складу ММС; зміни пристрою доступу до навчальних матеріалів; зміни початкових умов для моделей.

Основними складовими ММС є *обчислювальне ядро* (математичний пакет-інтегратор СКМ) та *інформаційне забезпечення*, що містить навчально-методичні та допоміжні інформаційні матеріали (рис. 1).

У процесі створення ММС для навчання математичних дисциплін особливу увагу слід приділити вибору математичного пакету, що складає ядро ММС.

Головними критеріями вибору СКМ для ядра ММС є:

- розширюваність (система повинна надавати можливість користувачеві доповнювати її для розв'язання нових класів задач);
- наявність різних інтерфейсів та підтримка web-сервісів (для забезпечення мобільного доступу);



Рис. 1. Основні складові ММС.

- кросплатформеність (мобільність програмного забезпечення);
- можливість створення програм із стандартними елементами управління (лекційних демонстрацій, динамічних моделей, тренажерів, навчальних експертних систем);
- можливість інтегрувати у себе різноманітне програмне забезпечення (на основі відкритих програмних інтерфейсів);
- підтримка технології Wiki;
- можливість локалізації та вільне поширення.

Як показали дослідження авторів [4–7, 9], найбільш повно наведеним критеріям відповідає Web-СКМ SageMath (таблиця 1), використання якої надає можливість в рамках одного середовища реалізувати основні складові ММС, зокрема, лекційні демонстрації, динамічні моделі, тренажери, навчальні експертні системи та інші навчальні матеріали; автоматизувати обчислювальний процес розв’язування задач прикладної спрямованості, зосередившись на побудові математичної моделі та інтерпретації результатів обчислювального експерименту; інтегрувати аудиторну та позааудиторну роботу студентів в єдиному середовищі. Саме тому в якості обчислювального ядра ММС доцільно обрати Web-СКМ SageMath.

Враховуючи, що інформаційне забезпечення, яке входить до складу ММС, є предметно-орієнтованим, розглядатимемо клас мобільних математичних середовищ, що мають однакове обчислювальне ядро та варіативне інформаційне забезпечення (рис. 2). Таким чином, заміна методичної складової інформаційного забезпечення надає можливість створювати різні ММС навчання математичних дисциплін.

Слід зазначити, що мобільним математичним середовищам побудованим на основі Web-СКМ SageMath притаманні такі основні характеристики хмарних технологій:

- опрацювання (обчислення) та зберігання даних відбувається на віддалених від користувача мережних серверах;
- масштабованість (можливість розміщення на декількох серверах та можливість розширення самого ММС);
- самообслуговування (користувач може самостійно змінювати обсяг даних, що зберігаються без необхідності зв’язку та взаємодії з постачальником послуг);

Табл. 1. Порівняльна характеристика СКМ.

Математичний пакет	Ліцензія	Розширюваність	Web-інтерфейс	WAP-інтерфейс	XML/RPC/SOAP / інші Web-сервіси	Кросплатформеність	Можливість створення програм із стандартними елементами управління	Можливість інтеграції різних пакетів	Підтримка Wiki	Інтернаціоналізація та локалізація	Мови програмування
GRAN	ВП, ЗК	+					+			+	
DG	ВП, ЗК						+				
GeoGebra	ВП, ВК	+	+			+	+			+	GGBScript, JavaScript
KAlgebra	ВП, ВК	+				+				+	
Cinderella	КП, ЗК	+	+			+	+			+	CindyScript
Maxima	ВП, ВК	+	+	+		+				+	Maxima, Lisp
SageMath	ВП, ВК	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Python, Sage, Sh, GAP, GP, Maxima, R, Singular, Kash, Macaulay, Magma, Maple, Mathematica, MATLAB, Mupad, Octave, Scilab, Spad
Maple	КП, ЗК	+	+		+	+	+	+			Maple, C/C++, Fortran, MATLAB
MATLAB	КП, ЗК	+	+		+	+	+	+			MATLAB, C/C++, Fortran, Java
Mathematica	КП, ЗК	+	+		+	+	+	+			Mathematica, C/C++, Fortran, Assembler
Magma	КП, ЗК	+	+			+					Magma
MathCAD	КП, ЗК	+	+		+	+	+	+		+	

Позначення: ВП – вільне поширення, КП – комерційне поширення, ВК – відкриті коди, ЗК – закриті коди

- універсальний доступ до мережі (завдяки використанню смартфонів, нетбуків);
- низька ціна (зокрема безоплатність).

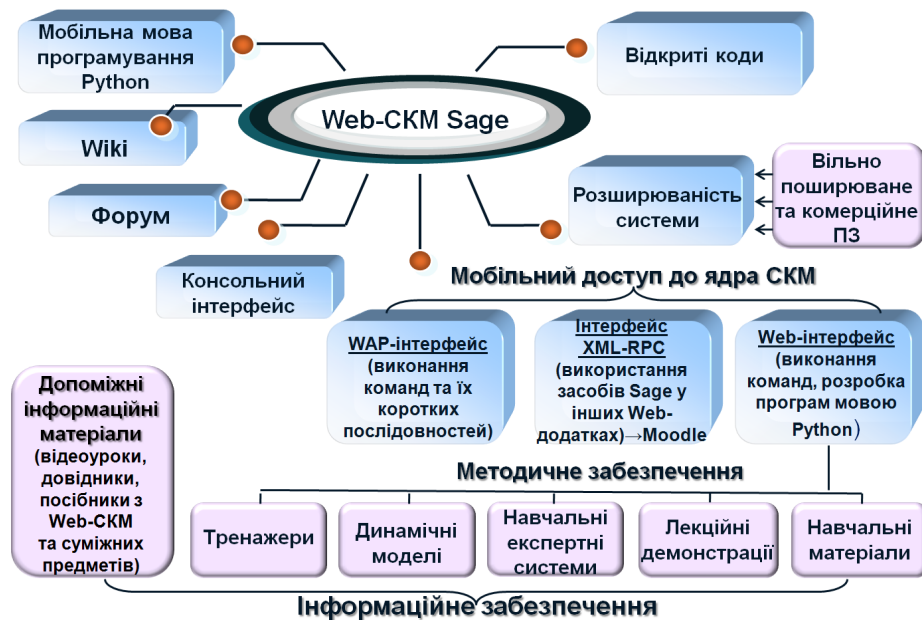


Рис. 2. Загальна структура мобільного математичного середовища.

2 Мобільне математичне середовище «Вища математика»

Розглянемо ММС «Вища математика», призначене для підтримки навчання вищої математики студентів економічних спеціальностей [10, 11].

Розробка методичної складової інформаційного забезпечення ММС «Вища математика» здійснювалась за такими напрямками: 1) графічна інтерпретація математичних моделей та теоретичних понять; 2) автоматизація рутинних обчислень; 3) підтримка самостійної роботи; 4) математичні дослідження; 5) генерація навчальних завдань. При цьому перші чотири напрями спрямовані на активізацію навчальної діяльності студентів, а п'ятий – на підвищення ефективності діяльності викладача.

Для реалізації *першого* та *четвертого* напрямів створено комп'ютерні моделі з графічним інтерфейсом і напівавтоматичним режимом управління. Розроблені моделі різняться за дидактичним призначенням відповідно до вказаних напрямів: лекційні демонстрації – для уяочення абстрактних математичних понять, динамічні моделі – для проведення навчальних досліджень. Розроблені моделі можуть використовувати Web-сервіси доступу до баз знань (наприклад, Wolfram|Alpha) та баз даних (зокрема, Google Finance).

Реалізація *другого* напрямку передбачала використання, насамперед, обчислювального ядра ММС. З метою автоматизації процесу дослідження за-

дач з економічним змістом, зосереджуючись на побудові моделі та інтерпретації результатів обчислювального експерименту.

Для реалізації *третього* напрямку розроблено:

- індивідуальні домашні завдання до кожного модуля, що включають приклади розв'язання типових завдань за темою модуля та задач для самостійного опрацювання трьох рівнів (для відпрацювання навичок «ручного» розв'язування; комп'ютерно-орієнтовані задачі, витрати часу на «ручне» розв'язання яких перевищують час на створення та дослідження моделі; дослідницькі завдання);
- приклади розв'язання завдань з кожного модуля у традиційному вигляді та за допомогою ММС (при цьому особливості компонування завдань, детальні пояснення кожного кроку розв'язання, застосування засобів ІКТ сприяють підвищенню ефективності самостійної роботи студентів);
- програми-тренажери з покроковою деталізацією етапів розв'язання математичної задачі, що надають можливість студентам здійснити детальну перевірку кожного кроку виконання завдання;
- навчальні експертні системи (НЕС), що надають викладачеві можливість організувати автоматизований контроль та корекцію результатів навчальної діяльності студентів, проводити тренування та підготовку до модульного і підсумкового контролю. Самостійна робота студентів зі створення баз знань експертної системи навчального призначення за обраною темою курсу вищої математики сприяє узагальненню та систематизації знань;
- навчально-консультативний форум надає можливість для спілкування всім користувачам різних інсталяцій ММС «Вища математика», дистанційного консультування, обміну досвідом розв'язування задач засобами ММС.

Для автоматизації підготовки та перевірки індивідуальних домашніх завдань, матеріалів для поточного та модульного контролю створено програми-генератори навчальних завдань, що реалізують п'ятий напрям. Завдяки можливості збереження результату генерації у природній математичній нотації, вибору довільної кількості завдань із відповідями, ММС є ефективним засобом створення генераторів навчальних завдань.

Для забезпечення відкритого доступу до розробленого ММС «Вища математика» було налаштовано Web-сервер ММС у віртуальній машині [10], що надає можливість хмарного доступу (рис. 3. Кожному зареєстрованому користувачу автоматично завантажуються всі навчально-методичні матеріали ММС «Вища математика» (рис. 4), крім індивідуальних домашніх завдань, які потрібно обрати самостійно із списку опублікованих аркушів згідно номеру модуля, що вивчається, та номеру студента в журналі академічної групи (рис. 5).

Назви робочих аркушів ММС «Вища математика» подано у форматі: `М_номер_призначення_назва (номер)`, де

М – «модуль»;

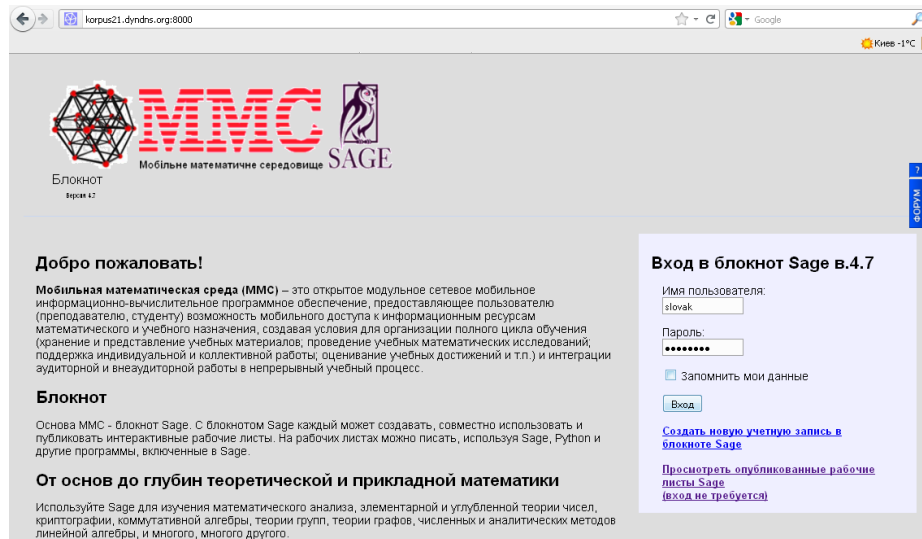


Рис. 3. Web-сервер MMC «Вища математика».

номер – означає, до якого саме змістового модуля курсу вищої математики належить робочий аркуш (приймає значення від 1 до 9);

призначення – вказує на тип програмного модуля чи розділ методичного комплексу (D – лекційні демонстрації та динамічні моделі, G – генератори навчальних завдань, T – тренажери, ES – навчальні експертні системи, Ex – вправи, ExS – приклади розв’язування, L – лекції, ІДЗ_варіант – варіант індивідуального домашнього завдання (від 1 до 30)).

Для підвищення зручності використання MMC «Вища математика» до його складу включено робочі аркуші з основними відомостями організації роботи у Web-СКМ SageMath (рис. 4), що містять теоретичні відомості, приклади застосування та відеоуроки. Крім того, з метою усунення незручностей, пов’язаних з якістю хмарних послуг, що надаються їх постачальниками, кожен користувач може завантажити локальну Windows-версію MMC «Вища математика», призначену для роботи в автономному режимі. Завдяки цьому швидкість виконання обчислень у MMC, пропорційна потужності комп’ютерної системи та обсягу оперативної пам’яті, може бути вище, ніж на сервері MMC, що економить навчальний час (це особливо актуально для лекційних занять). За наявності з’єднання з мережею Інтернет з локальною версією MMC можна звернутися до форуму. Для завантаження локальної Windows-версії MMC «Вища математика» необхідно подвійним натисканням правої кнопки миші відкрити закладку «Форум» та знайти на ньому відповідні посилання (рис. 6). Зауважимо, що використання лише локальної версії MMC «Вища математика» обмежує можливості у спілкуванні студентів з викладачем та суттєво ускладнює оновлення навчально-методичних матеріалів.

Блокнот
Версия 4.7

Новый рабочий лист Загрузить Скачать все активные Поиск рабочих листов

Архивировать Удалить Остановить Текущая папка: Активные Архивные Удаленные

Активные рабочие листы	Создатель / в сотрудничестве	Последняя редакция
☐ M_1_T_Метод Жордана-Гауса	slovak Share now	138 days ago by slovak
☐ M_2_D_Відстань між двома точками	slovak Share now	48 days ago by slovak
☐ M_2_D_Дії над векторами на площині	slovak Share now	48 days ago by slovak
☐ M_2_D_Дії над векторами у просторі	slovak Share now	148 days ago by semerikov

☐ M_9_L_Ряди	slovak Share now	165 days ago by semerikov
☐ Tutor1_Intro	slovak Share now	146 days ago by semerikov
☐ Tutor2_Expressions	slovak Share now	146 days ago by semerikov
☐ Tutor3_Graphics	slovak Share now	146 days ago by semerikov
☐ Tutor4_Equations	slovak Share now	146 days ago by semerikov
☐ Tutor5_LinearAlgebra	slovak Share now	146 days ago by semerikov
☐ Tutor6_Calculus	slovak Share now	146 days ago by semerikov
☐ Tutor7_DiffEq	slovak Share now	146 days ago by semerikov
☐ Tutor8_Combinatorics	slovak Share now	146 days ago by semerikov
☐ Tutor9_Programming	slovak Share now	146 days ago by semerikov
☐ TutorA_Install	slovak Share now	146 days ago by semerikov

Основи роботи в Sage

ФОРУМ

Рис. 4. Навчально-методичні матеріали ММС «Вища математика».

3 Елементи методики використання мобільного математичного середовища «Вища математика» у навчанні вищої математики

Впровадження ММС «Вища математика» у процес навчання вищої математики здійснюється здебільшого через такі форми організації навчання як лекція, практичне заняття, самостійна робота та консультації.

Для вивчення основних теоретичних положень курсу передбачено інформаційні та мультимедійні *лекційні заняття*, на яких висвітлюються основні теоретичні положення, алгоритми розв'язування навчальних завдань тощо. В ММС «Вища математика» наявні робочі аркуші з електронними лекціями,

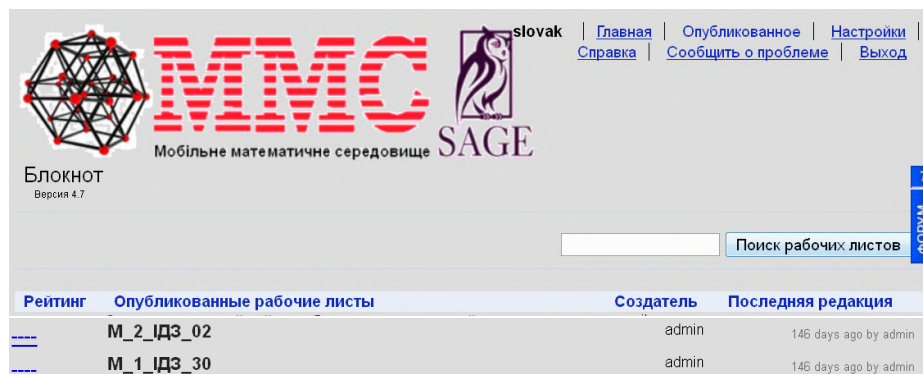


Рис. 5. Список опублікованих ІДЗ MMC «Вища математика».

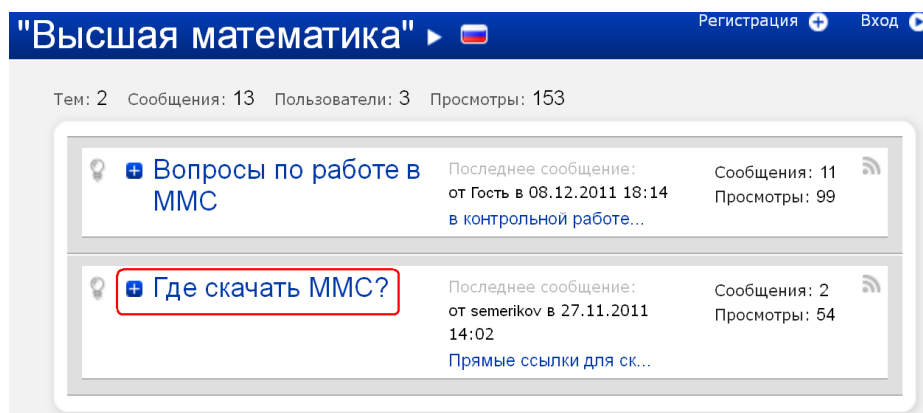


Рис. 6. Навчально-консультативний форум MMC «Вища математика».

з яких, при необхідності, студенти можуть одержати роздруківку конспекту лекції. При цьому, оптимальна форма конспекту передбачає наявність у лівій частині сторінки тезисно поданих основних моментів, а праворуч – місце для коментарів. Досягти такої форми можна вибором параметрів друку Web-сторінки, що містить конспект лекцій з обраного модуля. Комп'ютерно-орієнтований характер змісту конспекту лекцій підкреслюється включення до нього фрагментів коду, виконуваного у MMC, з результатами його виконання.

Вивчення матеріалу на лекціях доцільно організовувати таким чином, щоб залучити студентів до активної навчальної діяльності. З цією метою від студентів вимагається ретельна теоретична підготовка до кожної лекції з вказаної теми. Для цього студентам пропонується самостійно опрацювати основні означення, правила, алгоритми, теореми, а також (де це можливо) скласти узагальнюючі схеми, розробити алгоритми розв'язування певних

навчальних завдань. Безпосередньо на занятті викладач зупиняється на поясненні та ілюстрації необхідних теоретичних положень за допомогою таких програмних засобів ММС «Вища математика», як лекційні демонстрації та динамічні моделі. Використання таких моделей у процесі вивчення курсу вищої математики сприяє підвищенню пізнавальної активності студентів через унаочнення абстрактних математичних понять, надає можливість полегшити розуміння змісту математичних методів та алгоритмів, створити змістову основу для розв'язування прикладних задач та проводити елементарні теоретичні дослідження.

Так, під час вивчення першого модуля «Елементи лінійної алгебри» (зокрема, теми «Матриці та дії над ними») пропонуємо студентам модель, яка демонструє правила додавання та віднімання матриць, множення матриці на скаляр, транспонування матриці, множення двох матриць на прикладі квадратних матриць третього порядку (рис. 7).

Показати задані матриці ☒

Оберіть дію:

A+B

A-B

A*B

B*A

Множення на скаляр

Транспонування матриць

Матриця A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матриця B:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Над матрицями виконано дію: A*B

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Рис. 7. Інтерфейс користувача моделі «Операції над матрицями».

Особливістю цієї моделі є те, що результат виконання тієї чи іншої операції подано у вигляді формули, що змінюється відповідно до введених даних, тобто користувач не просто отримує готовий результат, а бачить, які дії потрібно виконати для того, щоб отримати суму, різницю чи добуток матриць.

При вивченні модуля «Елементи векторної алгебри» пропонуємо застосовувати дві моделі: перша – ілюструє операції над векторами (рис. 8), друга – залежність скалярного добутку векторів від градусної міри кута між ними (рис. 9). Під час роботи з останньою моделлю, змінюючи кут між векторами (пересовуючи повзунок відповідного поля), студент наочно переконається, що дійсно скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулеві тощо.

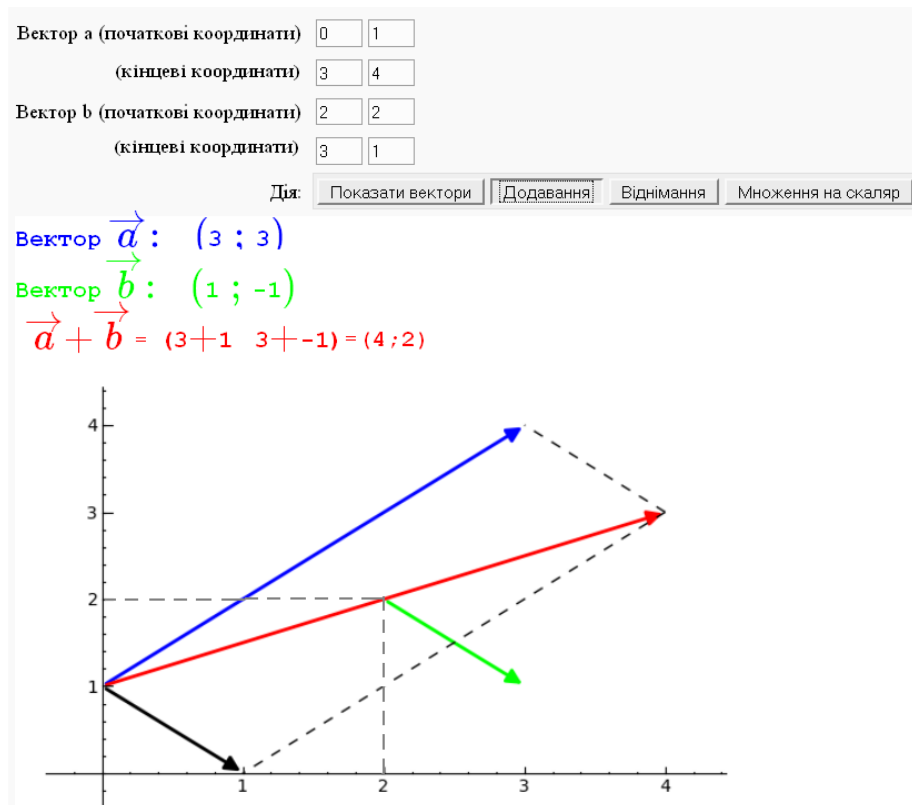


Рис. 8. Інтерфейс користувача моделі «Операції над векторами».

Такі моделі виконують ілюстративну та інформативну функції, тому їх доцільно використовувати під час лекційних занять як лекційні демонстрації. Вони надають можливість звільнити викладача від громіздких записів на дошці, а студентів у зошитах, тим самим вивільняючи час на обмірковування, складання та засвоєння алгоритмів розв'язування задач.

Зазначимо, що моделі, зображені на рис. 7–9, відображають математичні поняття, що є достатньо зрозумілими та наочними для сприйняття студентами. Проте більшість математичних понять є абстрактними, що викликає

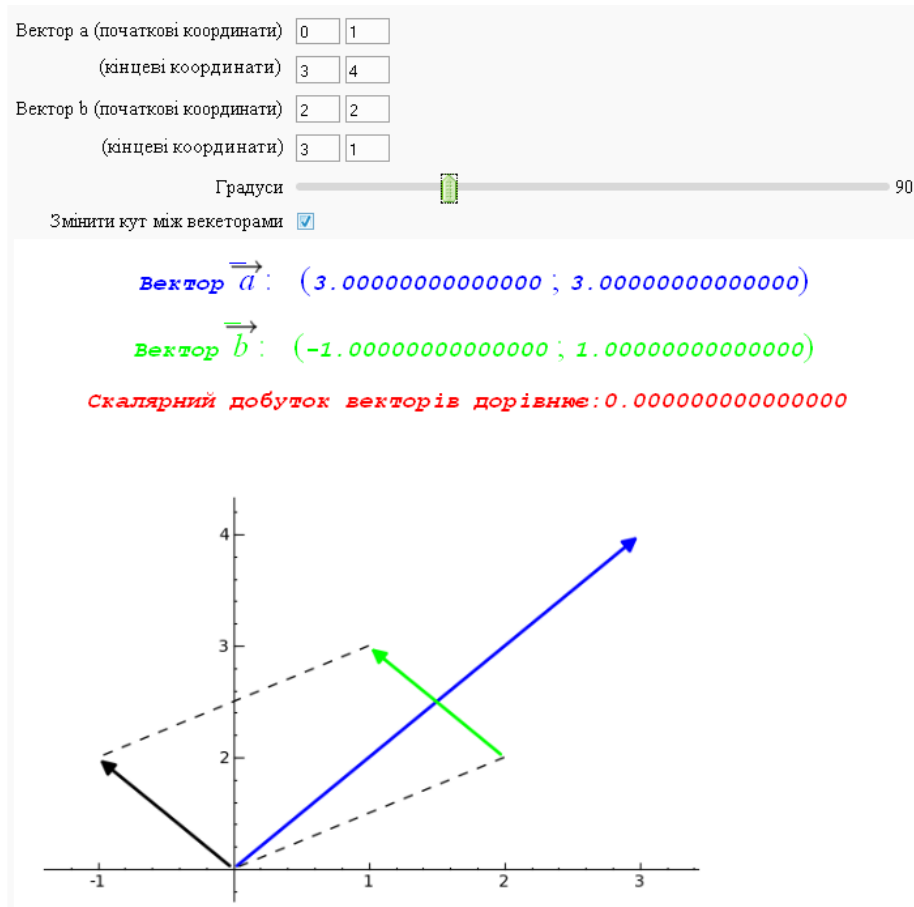


Рис. 9. Інтерфейс користувача моделі «Скалярний добуток векторів».

утруднення під час їх вивчення. Ґрунтовне розуміння та усвідомлення таких понять полегшує геометрична інтерпретація, що зазвичай відсутня у переважній більшості навчальних посібників.

Наведемо приклади моделей, що геометрично ілюструють такі поняття математичного аналізу, як «границя числової послідовності», «геометричний зміст границі числової послідовності», «обмежені послідовності» тощо.

Так, під час введення означення границі числової послідовності спочатку пропонуємо студентам розглянути модель, що відображає зміст означення границі числової послідовності (рис. 10). У даній моделі члени послідовності $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \dots$ зображуються точками на числовій осі. Змінюючи положення повзунка у полі «Номер члену числової послідовності», студенти доходять висновку, що члени послідовності a_n зі зростанням n як завгодно близько наближаються до деякого числа (у даному випадку

до 1, при цьому абсолютна різниця $|a_n - 1|$ із збільшенням n стає кожного кроку меншою, тобто зі зростанням n модуль різниці $|a_n - 1|$ буде менше будь-якого наперед заданого, як завгодно малого додатного числа).

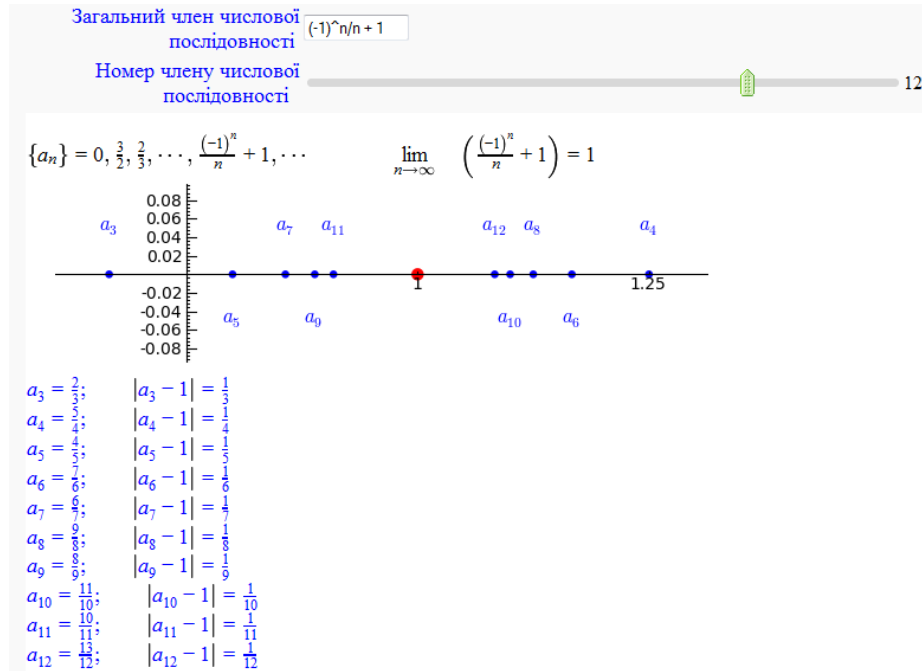


Рис. 10. Інтерфейс користувача моделі «Границя послідовності».

У такий спосіб виконується підведення студентів до поняття про те, що число, до якого наближаються члени послідовності із збільшенням n , і є границею цієї послідовності. Аналогічні дії пропонуємо виконати для різних послідовностей шляхом введення у поле «Загальний член числової послідовності» формули n -го члена. Далі наводимо означення границі числової послідовності та пропонуємо модель, що ілюструє її геометричний зміст (рис. 11).

При роботі з вказаною моделлю, змінюючи положення повзунка, студенти переконуються у тому, що, якщо числова послідовність має границю, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N , починаючи з якого (при $n > N$) всі члени послідовності потрапляють у ε -окіл точки A (границі), яким би малим він не був. Крім того, змінюючи дані у полі « $n > N(\varepsilon)$ », студенти мають можливість впевнитися у тому, що нерівність $|a_n - A|$ дійсно буде виконуватися лише для $n > N$ (для цього пропонується ввести значення n , менші за $N(\varepsilon)$).

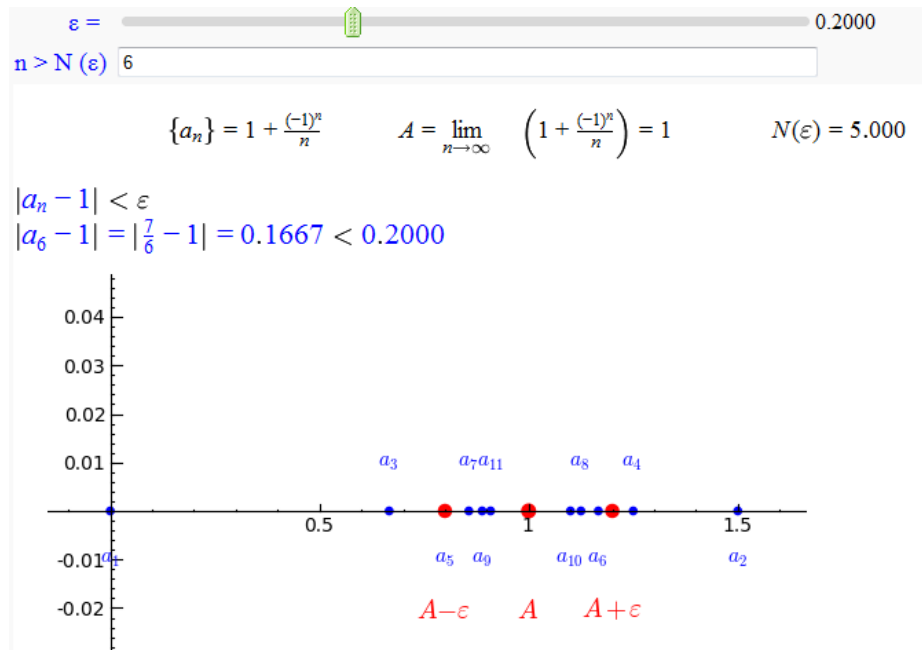


Рис. 11. Інтерфейс користувача моделі «Геометричний зміст границі послідовності».

Аналогічно до моделі «Геометричний зміст границі послідовності» для ілюстрації геометричного змісту границі функції $y = f(x)$ у нескінченності пропонуємо скористатися моделлю, інтерфейс якої зображено на рис. 12. Нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ рівносильна подвійній нерівності $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, яка відповідає розміщенню частини графіку у смужі шириною 2ε , якщо $x < -N$ та $x > N$.

Тобто, число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N > 0$, що для всіх x таких, що $|x| > N$, відповідні ординати графіка $f(x)$ будуть знаходитися у смужі $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$, якою б вузькою ця смуга не була, а коли $x \rightarrow \pm\infty$, графік функції асимптотично наближається до прямої $y = A$.

Таким чином, при $x \rightarrow +\infty$ означення $|f(x) - A| < \varepsilon$ справедливе для усіх $x > n$, при $x \rightarrow -\infty$ справджується для усіх $x < -N$.

Як свідчить практика, у більшості студентів першого курсу під час вивчення теми «Числова послідовність. Границя числової послідовності» не формується чіткого розуміння таких понять, як «послідовність, обмежена знизу», «послідовність, обмежена зверху», «обмежена послідовність» та «необмежена послідовність». Причиною цього є те, що у друкованих навчальних посібниках з вищої математики ілюстрація означень не розглядається у динаміці. Використовуючи модель «Обмежені послідовності» (рис. 13) на лекційних заняттях, у викладача з'являється можливість продемонструвати

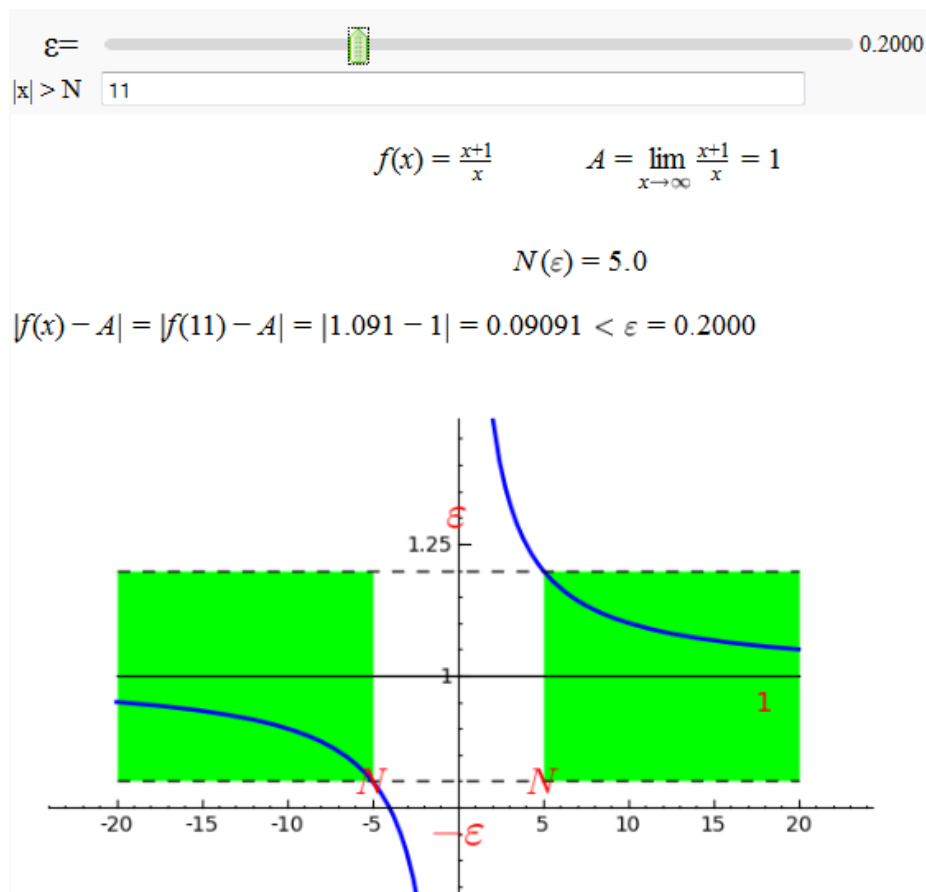


Рис. 12. Інтерфейс користувача моделі «Геометричний зміст границі функції при $x \rightarrow \infty$ ».

геометричний зміст розглядуваних понять, переконати студентів, що обмеженість послідовності не залежить від кількості обраних членів тощо.

Всі запропоновані вище моделі виступають у якості ілюстрацій теоретичних понять, їх основне призначення полягає у компактному поданні та ілюстрації певних теоретичних положень.

Проте, під час вивчення модуля «Ряди», зокрема, теми «Розвинення елементарних функцій у ряд Маклорена» студентам пропонується модель для демонстрації відповідності між функцією та її розвиненням у ряд Маклорена (рис. 14). Запропоновану модель можна використати не тільки на лекції в якості ілюстрації теоретичних понять, а й на *практичному занятті* як інструмент для проведення досліджень. Для цього викладачу необхідно сформулювати систему завдань, у результаті виконання якої студенти формують певні висновки.



Рис. 13. Інтерфейс користувача моделі «Обмежені послідовності».

Одним із можливих варіантів завдань для цієї моделі може бути наступний.

- Для функції $y = \sin x$ встановити повзунок параметра «Кількість частинних сум» на значення 1 і рухати його поступово, крок за кроком, до значення 6, спостерігаючи при цьому за зміною графіків частинних сум. В результаті дослідження студенти повинні відповісти на питання: Чому значення параметру «Кількість частинних сум» не відповідає порядку останньої частинної суми? Чому при значенні параметру «Кількість частинних сум» рівним 6 отримуємо п'ять частинних сум, причому деякі з них рівні між собою? Скільки доданків має п'ята частинна сума? Порівняти її з многочленом Тейлора п'ятого порядку, отриманим в результаті «ручних» розрахунків.
- Для функції $y = \cos x$ встановити повзунок параметра «Кількість частинних сум» на значення 1 і рухати його поступово, крок за кроком, до значення 7, спостерігаючи при цьому за зміною графіків частинних сум. В результаті дослідження студенти повинні відповісти на питання: При значенні параметра «Кількість частинних сум» рівним 5 який порядок має остання частинна сума? Як це можна пояснити? Чи є графіки зображених частинних сум періодичними функціями?

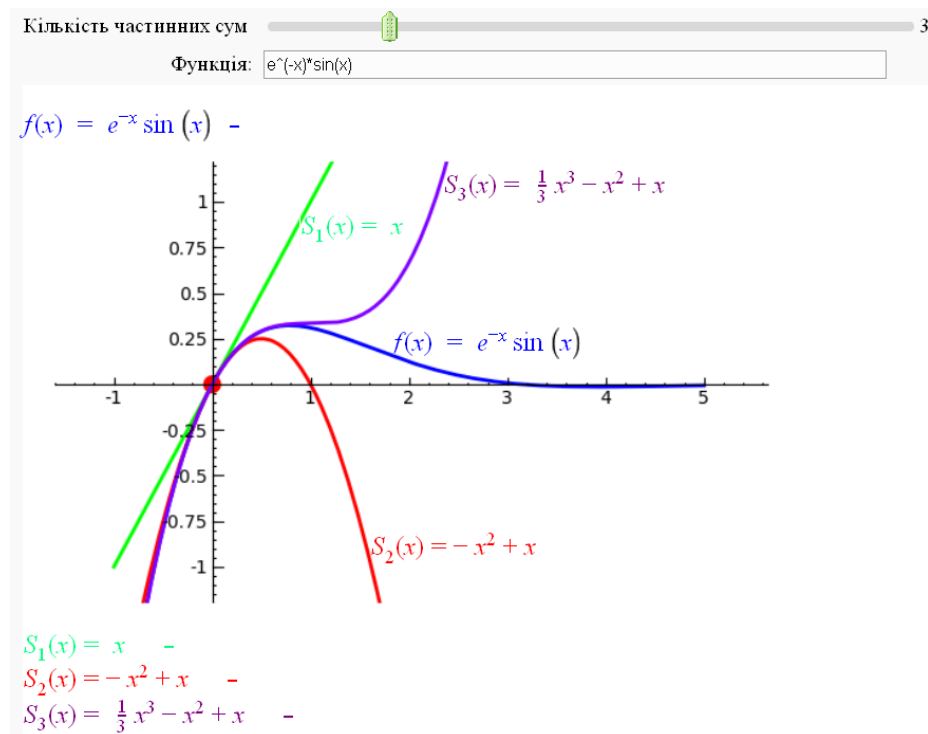


Рис. 14. Інтерфейс користувача моделі «Розвинення функції в ряд Маклорена».

- Для функції $y = e^{-x} \sin x$ встановити повзунок параметра «Кількість частинних сум» на значення 1 і рухати його поступово, крок за кроком, до значення 9, спостерігаючи при цьому за зміною графіків частинних сум. В результаті дослідження студенти повинні відповісти на питання: Яким чином значення параметру «Кількість частинних сум» впливає на графіки відповідних частинних сум? В околі якої точки всі графіки частинних сум співпадають? Чому?

В результаті виконання зазначених дій студенти роблять такі загальні висновки:

- від обраної кількості членів ряду залежить, наскільки співпадають графіки відповідної частинної суми та заданої функції в околі вказаної точки (у даному випадку точки нуля);
- чим більше значення x (чим далі x від точки 0), тим істотніше відрізняються графіки досліджуваної функції і відповідного розвинення в ряд Маклорена (поведінка ряду не має нічого спільного з поведінкою функції, що розкладають);

- 3) при розвиненні непарної функції графік будь-якої парної частинної суми співпадає з передуючим йому графіком непарної частинної суми, при розвиненні парної функції – навпаки.

При вивченні теми «Наближене обчислення визначених інтегралів» на практичному занятті пропонуємо студентам розглянути модель, що демонструє різні способи наближеного обчислення інтегралів, залежність результату обчислень від кількості інтервалів розбиття тощо.

Важливим є те, що студент має можливість сам задавати кількість інтервалів, підінтегральну функцію, встановлювати межі інтегрування та обирати формулу, за якою здійснюються обчислення, тобто у студента є можливість виконати навчальне дослідження. На рис. 15 показано інтерфейс користувача комп'ютерної моделі наближеного обчислення інтегралу.

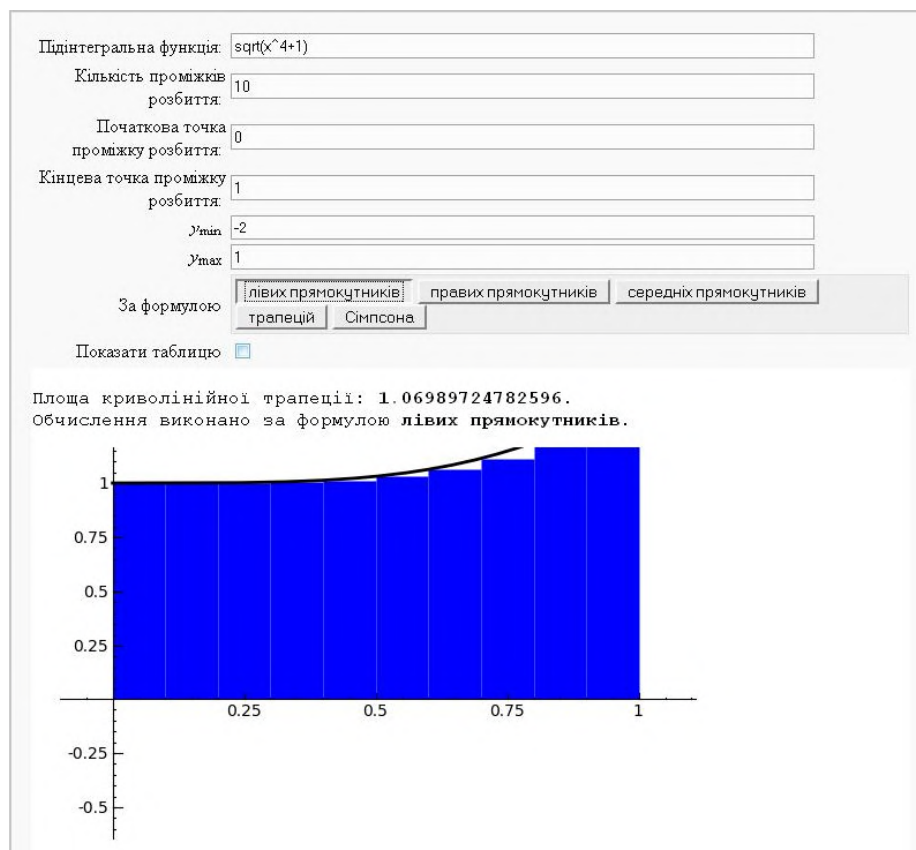


Рис. 15. Інтерфейс користувача моделі «Наближені обчислення інтегралу».

При роботі з цією моделлю доцільно запропонувати студентам виконати наступне завдання:

Знайти значення інтегралу $\int_1^e x \ln x dx$:

- 1) за допомогою формули інтегрування по частинам (розрахунки записати в робочих зошитах);
- 2) за допомогою моделі «Наближені обчислення інтегралу»: методами лівих прямокутників, правих прямокутників, середніх прямокутників, трапецій, формули Сімпсона; розрахунки виконати для різної кількості проміжків розбиття (10, 20, 40);
- 3) порівняти отримані результати.

В результаті виконання цього завдання студенти мають зробити наступні висновки:

- 1) чим більша кількість проміжків розбиття, тим точніше значення інтегралу, що обчислюється;
- 2) формула Сімпсона значно точніша, ніж формули прямокутників і формула трапецій.

Зауважимо також, що побудовану модель можна застосувати й у процесі введення поняття визначеного інтегралу.

Слід зазначити, що використання ММС «Вища математика» на практичних заняттях передбачає не тільки проведення досліджень за допомогою спеціально розроблених моделей, а й розв'язання задач професійної спрямованості, що потребують автоматичного виконання необхідних розрахунків, тим самим надаючи можливість більш детально зупинитися на особливостях побудови та реалізації відповідної математичної моделі, інтерпретації отриманих результатів тощо.

Так, під час вивчення теми модуля «Елементи лінійної алгебри» пропонуємо студентам розв'язати наступні задачі.

Задача 1. Підприємство випускає m видів продукції з використанням n видів сировини. Норми витрат сировини задані матрицею A , в якій на позиції (i, k) знаходиться число рівне кількості сировини, що витрачається (кг) k -го виду на виробництво одиниці продукції i -го виду. План об'єму випуску продукції задано вектором-рядком Q , в якому i -й елемент дорівнює кількості одиниць продукції i -го виду. Вектор-рядок S задає собівартість одиниці сировини кожного виду, а вектор-рядок T задає транспортні витрати на одиницю сировини кожного виду (k -ті елементи цих векторів відповідають k -му виду сировини). Користуючись операцією множення матриць, знайти:

- 1) кількість сировини кожного виду для виконання планового випуску продукції;
- 2) виробничі витрати на сировину, що витрачається на виробництво одиниці продукції кожного виду;
- 3) транспортні витрати на сировину, що витрачається на виробництво одиниці продукції кожного виду;

- 4) всі витрати на сировину, необхідну для виконання плану.

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 8.2 & 3 & 5.3 & 13.2 & 25 & 1.1 \\ 1.5 & 8.2 & 2 & 7.1 & 15.8 & 21 & 0.9 \\ 7 & 8 & 6 & 11 & 2.4 & 8 & 0.5 \\ 4 & 9.1 & 2 & 5 & 3.2 & 15 & 0.3 \\ 3 & 8.5 & 12 & 3.5 & 1.8 & 17 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$Q = (160 \ 125 \ 140 \ 311 \ 83)$$

$$S = (150 \ 22 \ 13 \ 15 \ 81 \ 211 \ 400)$$

$$T = (8 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 4 \ 1)$$

Розв'язання. Задані умовою задачі матриці є математичними моделями, тому для розв'язання цієї задачі необхідно з'ясувати, які операції потрібно виконати над матрицями.

Отже, аналізуючи умову задачі, доходимо висновків:

- 1) для знаходження кількості сировини кожного виду за умов виконання планового випуску продукції необхідно перемножити дві матриці Q та A ;
- 2) для обчислення виробничих витрат треба норми витрат сировини помножити на собівартість одиниці сировини кожного виду, тобто помножити матрицю A та транспоновану матрицю S ;
- 3) для розрахунку транспортних витрат необхідно норми витрат сировини помножити на транспортні витрати (знайти добуток матриць A та T^T);
- 4) для знаходження всіх витрат на сировину, потрібних для виконання плану, необхідно матрицю об'єму продукції помножити на суму транспортних та виробничих витрат.

Оскільки серед елементів заданих матриць є дробові числа, а матриця A має достатньо велику розмірність, то операції над матрицями виконати доцільно засобами ММС (рис. 16).

Задача 2. Швейне підприємство виготовляє зимові, демісезонні пальта та плащі. Плановий випуск за декаду для зимових пальт складає 20 одиниць, для демісезонних – 25, для плащів – 33. Використовуються тканини 4-х типів: драп, кашемір, спандекс, поліестр, норму витрат яких (в метрах) на кожен виріб задано таблицею. Вартість метра тканини кожного типу складає 40, 35, 24, 16 гр. од. відповідно. Вартість транспортування кожного виду тканини складає 5, 3, 2, 2 гр. од. відповідно.

Завдання:

1. Скільки метрів тканини кожного типу потрібно для виконання плану?
2. Знайти вартість тканини, що витрачається на виготовлення виробу кожного виду.
3. Визначити вартість усієї тканини, що необхідна для виконання плану.
4. Підрахувати вартість усієї тканини з урахуванням транспортних витрат.

```

A=matrix([[2.5,8.2,3,5.3,13.2,25,1.1],[1.5,8.2,2,7.1, 15.8,21,0.9],\
[7,8,6,11,2.4,8,0.5],[4,9.1,2,5,3.2,15,0.3], [3,8.5,12,3.5,1.8,17,0.4]])
Q=matrix([160,125,140,311,83])
S=matrix([150,22,13,15,81,211,400])
T=matrix([8,2,3,3,2,4,1])
Q*A

[3060.500000000000 6992.600000000000 3188.000000000000 5121.000000000000
5567.600000000000 13821.000000000000 485.000000000000]

M=A*S.transpose();M

ВІСЧИТИ
[7458.100000000000]
[6608.700000000000]
[3551.400000000000]
[4445.400000000000]
[4738.300000000000]

N=A*T.transpose();N

[188.800000000000]
[172.200000000000]
[160.300000000000]
[137.900000000000]
[159.500000000000]

Q*(M+N)

[4.422678200000000e6]

```

Рис. 16. Розв'язання задачі з економічним змістом у середовищі ММС.

Виріб	Витрати тканини			
	драп	кашемір	спандекс	поліестр
Зимове пальто	5	1	0	3
Демісезонне пальто	3	2	0	2
Плащ	0	0	4	3

Розв'язання. На відміну від попередньої, дана задача не містить готову математичну модель тому студентам потрібно скласти самостійно. Аналізуючи умову, доходимо висновку, що дані, наведені в задачі, доцільно записати у вигляді таблиць, тобто у вигляді матриць. Плановий випуск зимових, демісезонних пальт та плащів за декаду позначимо через матрицю-рядок $X = (20\ 25\ 33)$. Норму витрат тканини на кожен виріб, що задано таблицею, позначимо через матрицю, елементи рядків якої відповідають виду виробу, а елементи стовпчиків – типу тканини:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді вартість метру тканини кожного типу позначимо через матрицю-рядок C :

$$C = (40 \ 35 \ 24 \ 16),$$

а вартість транспортування кожного виду тканини – через матрицю-рядок P :

$$P = (5 \ 3 \ 2 \ 2).$$

Таким чином, виходячи із поставлених завдань, розв'язання вказаної задачі зводиться до виконання операцій над матрицями, які виконаємо у ММС (рис. 17).

```
X=matrix([20,25,33])# задамо відомі матриці
A=matrix([[5,1,0,3],[3,2,0,2],[0,0,4,3]])
C=matrix([40,35,24,16])
P=matrix([5,3,2,2])

M=X*A;M # кількості метрів тканини, необхідної для виконання плану
(175 70 132 209)

K=A*C.transpose();K #вартість тканини, що витрачається на виготовлення
виробу кожного виду
(283
 222
 144)

X*K# вартість усієї тканини, що необхідна для виконання плану
(15962)

M*P.transpose()# сума витрат транспортування усіх типів тканин
(1767)

X*K+M*P.transpose()# вартість усієї тканини з урахуванням транспортних
витрат
(17729)
```

Рис. 17. Виконання операцій над матрицями.

1. Для знаходження кількості метрів тканини, необхідної для виконання плану, потрібно матрицю X помножити на матрицю A .
Отримана матриця-рядок показує, що для виконання плану потрібно взяти 175 метрів драпу, 70 метрів кашеміру, 132 метри спандексу та 209 метрів поліестру.
2. Вартість тканини, що витрачається на виготовлення виробу кожного виду, знайдемо, перемноживши матрицю A на транспоновану матрицю-рядок C .
Матриця K визначає вартість тканини для виготовлення кожного виду виробу: для зимового пальто вартість тканини складатиме 283 (гр. од.), для демісезонного – 222 (гр. од.), для плащу – 144 (гр. од.) тощо.

3. Вартість усієї тканини, що необхідна для виконання плану, визначається із добутку матриць X та K .
4. З урахуванням транспортних витрат вся сума буде дорівнювати вартості тканини, тобто 15962 гр. од. плюс величина, що визначає суму витрат транспортування усіх типів тканин, необхідних для виконання плану.

Задача 3. Три судна доставили в порт 6000 т чавуну, 4000 т залізної руди та 3000 т апатитів. Розвантаження можна здійснювати як безпосередньо у залізничні вагони для подальшої доставки споживачам, так і у портові склади. У вагони можна завантажити 8000 т, а залишок вантажу потрібно буде відправити на склад. Необхідно урахувати, що вагони, що подаються до порту, не придатні для перевезення апатитів. Вартість завантаження 1 т сировини у вагони складає відповідно 4.3, 5.25 та 2.2 гр. од., а у склади – 7.8, 6.4 та 3.25.

Записати у математичній формі умови повного розвантаження суден, якщо витрати на нього повинні складати 58850 гр. од.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. За умовою задачі доставлені у порт чавун, залізну руду та апатити можна завантажити двома способами: або у залізничні вагони, або у портові склади. Позначимо через x_{ij} кількість вантажу (в тонах) i -го виду ($i = 1, 2, 3$), яку передбачається завантажити j -м способом ($j = 1, 2$). Таким чином, задача містить шість невідомих. Умову повного завантаження чавуну можна записати у вигляді:

$$x_{11} + x_{12} = 6000, \quad (1)$$

де x_{11}, x_{12} – частина чавуну, що завантажуються відповідно у вагони та на склади. Аналогічна умова повинна виконуватися і для залізної руди:

$$x_{21} + x_{22} = 4000. \quad (2)$$

Що ж стосується апатитів, то їх можна розвантажувати тільки на складі, тому невідоме $x_{31} = 0$, і умова повного розвантаження апатитів набуває вигляду:

$$x_{32} = 3000. \quad (3)$$

Умова повного завантаження усіх поданих до порту вагонів запишеться у вигляді:

$$x_{11} + x_{21} = 8000. \quad (4)$$

Витрати на розвантаження, за умовою, визначені у 58850 гр. од., що можна виразити записом:

$$4,3x_{11} + 7,8x_{12} + 5,25x_{21} + 6,4x_{22} + 3,25x_{32} = 58850. \quad (5)$$

Отже, з урахуванням ситуації, що склалася в порту, умови повного розвантаження суден виражаються у математичній формі системою лінійних рівнянь (1) – (5). Враховуючи рівняння (3), рівняння (5) перепишеться у вигляді:

$$4,3x_{11} + 7,8x_{12} + 5,25x_{21} + 6,4x_{22} = 49100,$$

маємо систему з 4-х рівнянь, з чотирма невідомими $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 6000 \\ x_{21} + x_{22} = 4000 \\ x_{11} + x_{21} = 8000 \\ 4,3x_{11} + 7,8x_{12} + 5,25x_{21} + 6,4x_{22} + 3,25x_{32} = 58850 \end{cases}$$

Для розв'язання цієї системи необхідно виконати наступні дії:

```
x_11,x_12,x_22,x_21=var('x_11,x_12,x_22,x_21')
solve([x_11 +x_12==6000,x_21 +x_22==4000,x_11+x_21==8000,\
4.3*x_11+7.8*x_12+5.25*x_21+6.4*x_22==49100],x_11,x_12,x_21,x_22)
```

В результаті отримаємо наступні значення змінних:

$$x_{11} = 6000, x_{12} = 0, x_{21} = 2000, x_{22} = 2000.$$

Отже, для того, щоб повністю розвантажити судна, витративши при цьому 58850 гр. од., у вагони потрібно завантажити 6000 т чавуну та 2000 т залізної руди, у склади – 2000 т залізної руди та 3000 т апатитів.

Невід'ємною частиною навчання вищої математики є *самостійна робота* студентів. Основною формою організації самостійної роботи було обрано індивідуальні домашні завдання (ІДЗ) з кожного модуля, у вигляді робочих аркушів ММС. Вони складаються з прикладів розв'язування типових завдань за темою модуля та задач для самостійного опрацювання трьох рівнів.

Завдання першого рівня призначені для відпрацювання навичок «ручного» розв'язування задач. Під час виконання цих завдань студенти мають можливість застосування ММС для перевірки не тільки остаточного результату обчислень, а й проміжних значень. Завдання другого типу є комп'ютерно-орієнтованими. До них відносять задачі, витрати часу на ручне розв'язання яких не виправдано перевищують час створення комп'ютерної моделі. Завдання третього типу відносять до творчих; вони передбачають виконання дослідження математичної моделі засобами ММС.

Крім розроблених ІДЗ, ММС «Вища математика» містить аркуші з прикладами розв'язування різноманітних завдань з кожного модуля (рис. 18) у традиційному вигляді та за допомогою Web-СКМ SageMath. Особливості компонування завдань, детальні пояснення кожного кроку розв'язання, застосування засобів ІКТ сприяє активізації самостійної роботи студентів.

Якість формування навичок розв'язування навчальних завдань безпосередньо пов'язана з якісною, детальною перевіркою домашньої роботи студентів, що потребує додаткових витрат часу на практичних заняттях. Більшість викладачів, контролюючи виконання домашніх завдань, перевіряє лише правильність відповіді і якщо в аудиторії знайдеться хоча б 2–3 студенти, які отримали правильні відповіді, то покрокову перевірку не виконують. Проте, для ефективної самостійної роботи у студента повинна бути можливість не тільки перевірити кінцевий результат будь-яких обчислень, а і кожен крок виконання завдання. Крім того, процес засвоєння знань та вмінь є індивідуальним для кожного студента. Одному для формування певних практичних навичок достатньо лише прикладів, розв'язаних викладачем на

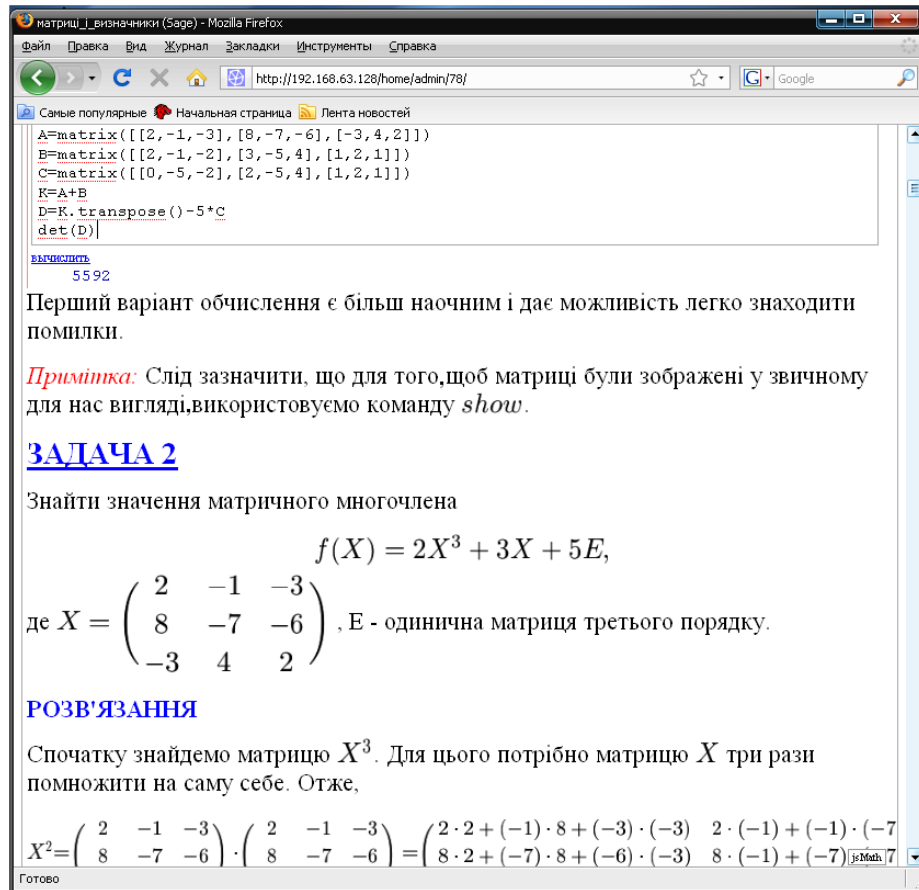


Рис. 18. Робочий аркуш до теми «Матриці і визначники».

лекційному занятті, іншому потрібно розв'язати досить велику кількість навчальних завдань самостійно з можливістю здійснення детальної перевірки. Для реалізації цього були розроблені програми-тренажери, основне призначення яких полягає у поданні всіх етапів розв'язування математичної задачі.

Так, під час вивчення теми «Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Жордана-Гауса» (однієї з найскладніших тем модуля «Елементи лінійної алгебри») студентам пропонується скористатися тренажером, інтерфейс якого зображено на рис. 19. Наприклад, потрібно розв'язати наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 13 \\ -7x_1 - 8x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

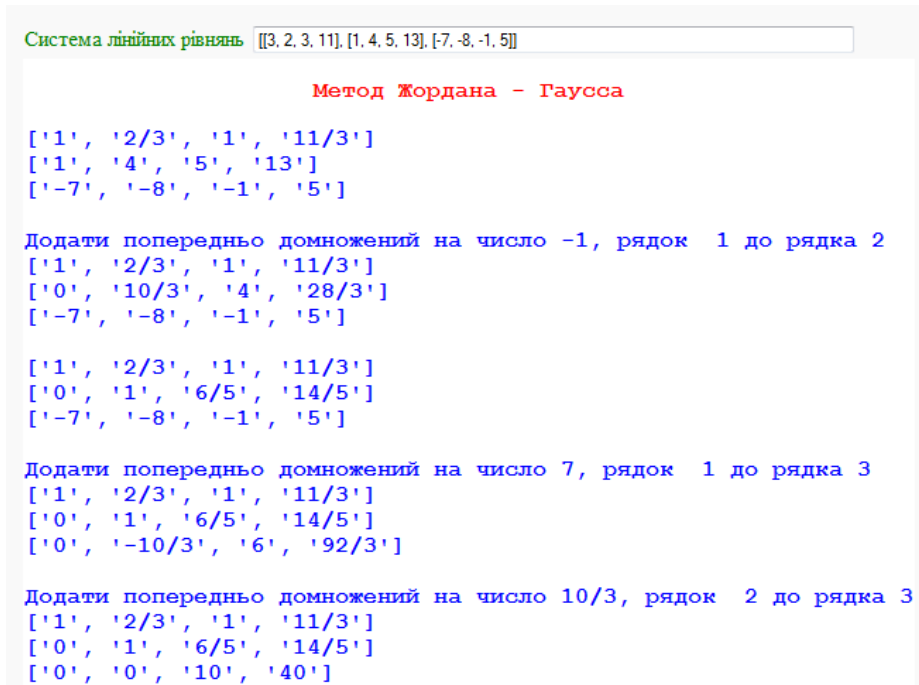


Рис. 19. Інтерфейс тренажера з теми «Метод Жордана-Гауса».

Для цього у поле «Система лінійних рівнянь» потрібно через кому ввести коефіцієнти розширеної матриці системи, згруповані по рядках, у квадратних дужках.

При роботі з цією програмою-тренажером у студентів з'являється можливість: перевірити кінцевий результат обчислень, порівняти розв'язувальні таблиці, отримати рекомендацію щодо виконання необхідних дій над рядками тощо.

Під час вивчення теми «Інтегрування частинами» пропонуємо тренажер для інтегрування виразів виду $\int P(x) \cdot e^{bx} dx$, де $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ (рис. 20).

При застосуванні цієї програми, з метою формування більш чітких теоретичних знань, доцільно запропонувати студентам виконати систему наступних дій:

- 1) змініть положення повзунка таким чином, щоб у полі «Степінь многочлена» з'явилися значення n ($n = 1, 2, 3, \dots, 10$);
- 2) підрахуйте, скільки разів було використано загальну формулу для інтегрування частинами;
- 3) виконайте дії 1)–2), змінивши положення повзунка таким чином, щоб у полі «Степінь многочлена» по черзі з'явилися різні значення степеня;

Степінь многочлена  2

Початковий інтеграл виду $\int (3x^2 + 2x + 1)e^{2x} dx$

Загальна формула інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$.

В даному випадку маємо:

1. Проінтегруємо частинами $\int (3x^2 + 2x + 1)e^{2x} dx$

$u(x) = 3x^2 + 2x + 1$	$dv(x) = e^{2x} dx$
$du(x) = (6x + 2)dx$	$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$\int (3x^2 + 2x + 1)e^{2x} dx = \frac{1}{2}(3x^2 + 2x + 1)e^{2x} - \int (3x + 1)e^{2x} dx$

2. Проінтегруємо частинами $\int (3x + 1)e^{2x} dx$

$u(x) = 3x + 1$	$dv(x) = \frac{1}{2}e^{2x} dx$
$du(x) = 3dx$	$v(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$

$\int (3x + 1)e^{2x} dx = \frac{1}{2}(3x + 1)e^{2x} - \int \frac{3}{2}e^{2x} dx$

3. Проінтегруємо частинами $\int \frac{3}{2}e^{2x} dx$

Інтеграл $\int \frac{3}{2}e^{2x} dx = \frac{3}{4}e^{2x}$ - інтегрувати частинами не потрібно, оскільки многочлен нульового степеня - це число.

Отже, $\int (3x^2 + 2x + 1)e^{2x} dx = (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4})e^{(2x)} + C$

Рис. 20. Інтерфейс тренажера з теми «Інтегрування частинами».

- 4) зробіть висновок щодо залежності між степенем многочлена та кількістю повторень інтегрування частинами.

Крім того, варіант даного тренажера для інтегрування виразів у загальному вигляді (рис. 21) студентам пропонується використати для виведення рекурентної формули інтегралів виду $I_n = \int x^n e^{ax} dx, a \neq 0$, що виражається через аналогічний інтеграл I_k , при $k < n$ (n – натуральне число, $n > 2$).

Таким чином, застосування програм-тренажерів у самостійній навчальній діяльності студентів надає можливість:

- враховувати психолого-педагогічні особливості студентів, забезпечуючи тим самим диференціацію та індивідуалізацію навчального процесу;
- поліпшити якість самостійної позааудиторної роботи студентів (користувачу надається можливість самостійно відстежити та перевірити кожен

Степінь многочлена
2

Початковий інтеграл виду $\int (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{bx} dx$

Загальна формула інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$.

В даному випадку маємо:

1. Проінтегруємо частинами $\int (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{bx} dx$

$u(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$	$dv(x) = e^{bx} dx$
$du(x) = (2a_2x + a_1)dx$	$v(x) = \frac{e^{bx}}{b}$

$$\int (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{bx} dx = \frac{(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{bx}}{b} - \int \frac{(2a_2x + a_1)e^{bx}}{b} dx$$

2. Проінтегруємо частинами $\int \frac{(2a_2x + a_1)e^{bx}}{b} dx$

$u(x) = 2a_2x + a_1$	$dv(x) = \frac{e^{bx}}{b} dx$
$du(x) = 2a_2 dx$	$v(x) = \frac{e^{bx}}{b^2}$

$$\int \frac{(2a_2x + a_1)e^{bx}}{b} dx = \frac{(2a_2x + a_1)e^{bx}}{b^2} - \int 2 \frac{a_2e^{bx}}{b^2} dx$$

3. Проінтегруємо частинами $\int 2 \frac{a_2e^{bx}}{b^2} dx$

Інтеграл $\int 2 \frac{a_2e^{bx}}{b^2} dx = 2 \frac{a_2e^{bx}}{b^3}$ - інтегрувати частинами не потрібно, т.я. многочлен нульового степеня $2a_2$ - це число.

Отже,

$$\int (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{bx} dx = \left(\frac{(a_2b^2x^2 + a_0b^2 + (a_1b^2 - 2a_2b)x - a_1b + 2a_2)}{b^3} \right) e^{bx} + C$$

Рис. 21. Інтерфейс тренажера з теми «Інтегрування частинами у загальному вигляді».

- крок розв’язання навчального завдання, порівняти результати, отримані програмою та самим студентом);
- здійснювати теоретичні узагальнення.

У процесі розв’язання навчальних вправ з таких модулів, як «Інтегральне числення функції однієї змінної», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальні рівняння», студентам для правильного розв’язання вказа-

них завдань часто доводиться визначати тип того чи іншого математичного виразу.

Так, наприклад, для того, щоб обчислити інтеграл, спочатку потрібно встановити його вид, і в залежності від цього обрати метод інтегрування та потрібну підстановку. Як правило, розв'язання таких вправ на практичному занятті за безпосередньої участі викладача не викликає утруднень. Проте у процесі самостійної позааудиторної роботи у частини студентів виникають утруднення щодо встановлення виду інтегралу. Тому для ефективного управління самостійною навчальною діяльністю студентів з вищої математики доцільно скористатися розробленою викладачем навчальною експертною системою (НЕС), яка б надала можливість організувати автоматизований контроль та корекцію результатів навчальної діяльності, тренування тощо.

Оскільки навчання побудови НЕС не є складовою змісту математичної підготовки, то у процесі навчання вищої математики доцільно використовувати Web-орієнтовані засоби, що не вимагають встановлення на комп'ютері користувача та можуть виконуватися на широкому спектрі пристроїв (в тому числі мобільних) та операційних систем. Прикладом такого засобу, інтегрованого у ММС «Вища математика», є Web-НЕС eXpertise2Go [2].

Навчальну діяльність студентів при роботі з експертними системами можна поділити на два види. Перший вид діяльності полягає у використанні готових проблемно-орієнтованих експертних систем як інформаційно-довідкових систем, у яких зберігаються знання про предметну галузь.

Так, наприклад, під час виконання індивідуального домашнього завдання за змістовим модулем «Диференціальні рівняння» студентам пропонується використати Web-НЕС «Визначення типу диференціального рівняння» (рис. 22).

Розроблена експертна система надає можливість:

- визначити тип диференціального рівняння (якщо рівняння не є диференціальним, то з'являється відповідне повідомлення);
- повторити процедуру визначення типу рівняння з початку (у разі помилкового вибору відповіді) за допомогою кнопки «До початку»;
- продемонструвати правило, за яким було зроблено висновок, а також відповіді, що їх увів студент на поставлені питання за допомогою кнопки «Пояснити?»;
- показати, яке правило на даний момент випробовується та яку відповідь потрібно ввести, щоб визначення типу рівняння здійснювалося саме за цим правилом, за допомогою кнопки «Чому питаємо?».

Другий вид діяльності передбачає заповнення знаннями власної експертної системи за обраною темою курсу вищої математики. При цьому студенту доводиться активно користуватися необхідною літературою – довідниками, підручниками, енциклопедіями, звертатися до баз знань з допомогою мереж зв'язку тощо.

Під час заповнення власної таблиці для генерації експертної системи за допомогою e2gRuleWriter студент користується правилами логіки вислов-



Рис. 22. Інтерфейс Web-NEC з теми «Диференціальні рівняння».

лень та своїми знаннями теоретичного матеріалу. Слід зазначити, що завдання такого типу вимагають від студентів умінь: аналізувати матеріал, що вивчається, порівнювати, вибирати спільні якості понять, перелічувати загальні властивості, визначати обсяг понять, структурувати навчальний матеріал, узагальнювати, систематизувати тощо. Застосування у навчальному процесі таких видів завдань надає можливість для ґрунтовної підготовки студентів до модульного та підсумкового контролю. Це сприяє узагальненню та систематизації знань студентів з вищої математики, а також дозволяє викладачеві шляхом випробування бази знань НЕС зробити висновок про ефективність засвоєння студентом навчального матеріалу.

Так, наприклад, при вивченні теми «Інтегрування частинами» студентам пропонується самостійно створити та перевірити експертну систему, за допомогою якої можна було б визначити, яку частину підінтегрального виразу позначити за u , а яку за dv , при вивченні теми «Границя функції» – експертну систему, що допомагає розкривати невизначеностей різних типів тощо.

Для впровадження дистанційної форми консультування у ММС «Вища математика» розроблено навчально-консультативний форум.

За його допомогою можна:

- отримувати консультацію у зручний для студента час;
- підвищити ефективність консультування шляхом уникнення однотипних питань;
- накопичувати банк типових питань та відповідей на них, доступних різним поколінням студентів;
- оперативно доводити до відома студентів завдання контрольних та практичних робіт, робити оголошення тощо.

Додатковими перевагами запропонованої форми консультування є її прозорість, сучасність та відповідність вимогам Болонського процесу.

4 Висновки

Таким чином, використанням ММС «Вища математика» у навчанні вищої математики надає можливість студентам засвоїти необхідний навчальний матеріал та впливає на: розвиток пізнавальної активності (комп'ютерні моделі; практичні завдання, зокрема задачі з економічним змістом; лекційні матеріали); формування навичок самостійної роботи (тренажери, НЕС); узагальнення та систематизацію знань (НЕС, задачі з економічним змістом, комп'ютерні моделі).

References

- [1] Bykov, V.Y.: Revitalizing education through the integration of cloud technologies. *Educational Dimension* **8**, 143–167 (Jun 2023), <https://doi.org/10.31812/ed.598>
- [2] eXpertise2Go.com: Expert System, Decision Table and ID3 Rule Induction Tools (2014), URL <http://web.archive.org/web/20191023223134/http://www.expertise2go.com/>
- [3] Fedorenko, O.H., Havrysh, O.H., Velychko, V.Y.: Features of using Moodle tools in the training of future social workers. *Educational Dimension* **7**, 261–281 (Aug 2022), <https://doi.org/10.31812/educdim.4714>
- [4] Kyslova, M.A., Semerikov, S.O., Slovak, K.I.: Development of mobile learning environment as a problem of the theory and methods of use of information and communication technologies in education. *Information Technologies and Learning Tools* **42**(4), 1–19 (Aug 2014), <https://doi.org/10.33407/itlt.v42i4.1104>
- [5] Kyslova, M.A., Slovak, K.I.: Method of using mobile learning environments in teaching mathematics of future electromechanical engineer. *Information Technologies and Learning Tools* **51**(1), 77–94 (Feb 2016), <https://doi.org/10.33407/itlt.v51i1.1360>
- [6] Merzlykin, P.V., Marienko, M.V., Shokaliuk, S.V.: CoCalc Tools as a Means of Open Science and Its Didactic Potential in the Educational Process.

- In: Semerikov, S., Osadchyi, V., Kuzminska, O. (eds.) Proceedings of the 1st Symposium on Advances in Educational Technology - Volume 1: AET, pp. 109–118, INSTICC, SciTePress (2022), ISBN 978-989-758-558-6, <https://doi.org/10.5220/0010921000003364>
- [7] Merzlykin, P.V., Popel, M.V., Shokaliuk, S.V.: Services of SageMathCloud environment and their didactic potential in learning of informatics and mathematical disciplines. CTE Workshop Proceedings **5**, 13–19 (Mar 2018), <https://doi.org/10.55056/cte.130>
- [8] Sclater, N.: Cloud computing in education. Policy brief, UNESCO Institute for Information Technologies in Education, Moscow (Sep 2010), URL <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000190432>
- [9] Semerikov, S.O., Slovak, K.I.: Theory and method using mobile mathematical media in the process of mathematical education higher mathematics students of economic specialties. Information Technologies and Learning Tools **21**(1) (Mar 2011), <https://doi.org/10.33407/itlt.v21i1.413>
- [10] Slovak, K.I.: Mobile mathematical environment “Higher Mathematics” (2011), URL https://archive.org/details/mme_sage
- [11] Slovak, K.I.: Mobilnaia matematicheskaia sreda “Vysshiaia matematika” [Mobile mathematical environment “Higher Mathematics”] (2011), URL <https://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=3835176>
- [12] Slovak, K.I., Semerikov, S.O., Tryus, Y.V.: Mobilni matematychni seredovyshcha: suchasnyi stan ta perspektyvy rozvytku [Mobile mathematical environment: current state and development prospects]. Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriiia 2 : Kompiuterno-orientovani systemy navchannia **12**, 102–108 (2012), URL http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nchnpu_2_2012_12_16